普通高等教育"十五"国家级规划教材

数学分析教程

（上册）

常庚哲　史济怀　编

高等教育出版社

ISBN 7-04-011920-X

9 787040 119206 >

定价 32.90 元

普通高等教育“十五”国家级规划教材

数学分析教程

（上册）

常庚哲　史济怀　编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材，是在1998年江苏教育出版社出版的《数学分析教程》的基础上作了较大的改动而成的，原书在全国同类教材中有非常积极的影响。

本书分上、下两册。上册内容包括：实数和数列极限，函数的连续性，函数的导数，一元微分学的基本定理，插值与逼近初步，求导的逆运算，函数的积分，曲线的表示和逼近、数项级数，函数列与函数项级数等。

本书可供综合性大学和理工科院校数学系作为教材使用，也可作为其他科研人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析教程．上册/常庚哲，史济怀编．—北京：高等教育出版社，2003.5

ISBN 7-04-011920-X

Ⅰ．数…　Ⅱ．①常…②史…　Ⅲ．数学分析－高等学校－教材　Ⅳ．017

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第012684号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　址	http://www.hep.edu.cn
传　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	中国农业出版社印刷厂		
开　本	787×960　1/16	版　次	2003年5月第1版
印　张	31.75	印　次	2003年5月第1次印刷
字　数	590 000	定　价	32.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

序 言

“数学分析”究竟应该包括哪些内容，从西方和东欧各国名为《数学分析》的书籍来看，一直没有十分明确的定义，但是在我国，它作为大学数学系的一门课程的名称，通常包含一元和多元微分学和积分学，以及与之相关的内容. 从它的地位和作用，从所占用的学时数来看，说它是数学系最重要的基础课，是当之无愧的.

微积分已有三百多年的历史，经过跨越好几个世纪的数学巨匠们的精雕细琢，千锤百炼，已经形成了一个完整的、精密的庞大知识宝库. 随着时代的进步和科学技术的发展，传统数学分析教材的内容显得比较陈旧，只有极少数的几处(例如 Bernstein 多项式)涉及 20 世纪初的发现. 从 21 世纪的今天来看，这种反差更加强烈，改革数学分析教材的必要性日益显露出来了. 在有些新出版的数学分析教科书中，引入了拓扑空间、微分流形，这是朝“现代化”方向走的一种试验. 我们的想法则是在保持原有理论水平的基础上，着重于加强数学分析同现代应用数学的其他分支学科的联系. 这样做既不会加重学生的负担，又不会挤占后续课程的时间. 我们认为，任何积极的改革，都不应该触动其中最基础的理论部分. 回顾 20 世纪 50 年代和 70 年代以抛弃这些基本理论为特色的教学改革都未能坚持下来的历史，使我们变得聪明起来，不再干那种蠢事.

何琛、史济怀、徐森林三位教授所著的《数学分析》(共三册)一书，由高等教育出版社于 1985 年公开出版. 其实，该书早在 1985 年以前，就以讲义的形式作为中国科学技术大学数学系、少年班和教改试点班的教材. 至今，这套教材已经为中国科学技术大学的数学教学起过重要的作用，在全国同类教材中也产生了积极的影响.

本书正是以上述《数学分析》一书为基础而写成的. 这中间融合了 20 多年来用它作为教科书的教学经验，同时也参考了国内外同类书籍中的许多名著. 在我们看来，本教程有如下特色.

1. 从基本理论上看，本教程不但包含了上述《数学分析》的全部内容，而且在许多地方添加了新的材料. 其中值得一提的是，在单变量的积分理论中，我们证明了“Riemann 可积的充分必要条件是被积函数在积分区间上的不连续点的集合是一零测集”. 通常这一定理是“实变数函数”课程中的内容，但是我们用了

完全属于数学分析的技巧加以处理.有了这一定理,就可以删去关于可积性的许多讨论,从总体上来看反而缩短了篇幅.其次,增加了二元凸函数的理论和应用;采用了 Peter Lax 对圆的等周性质的优美证明;收入了能充满整个正方形的 Schoenberg 的连续曲线.至于更加系统的知识的补充,将在以下作详细介绍.

2. 在第2章"函数的连续性"的最后,我们介绍了"混沌现象",叙述并证明了李天岩和 Yorke 的"周期3蕴涵混沌"的著名定理(1975).虽然对混沌的研究是当今数学的一个热门分支,但是在它的生长点上,则完全是"微积分的",更具体地说,只不过是连续函数在闭区间上的性质的巧妙应用.过去,人们热衷于找出函数迭代的表达式,欢喜收敛的迭代.在这里我们告诉读者,研究不收敛的迭代会碰到一些非常奇特的现象,从而生长出新的理论.

3. 在第8章"曲线的表示和逼近"中,我们介绍了计算机辅助几何设计(computer aided geometric design,简写为 CAGD)中广泛使用的 Bézier 曲线.它的数学基础是经典的 Bernstein 多项式(1912年).过去,在很多数学分析书中也介绍过 Bernstein 多项式,主要是用来作为用多项式一致逼近有限闭区间上的连续函数的一个构造性的证明.在逼近论中,研究 Bernstein 多项式的文献浩如烟海,但由于它的收敛速度十分缓慢,直到20世纪60年代初期,逼近论的专家们还在为它没有任何的实际应用而悲叹.正在那个年代,法国的工程师 Bézier 创造的、后来被人们称为 Bézier 曲线的曲线被成功地运用到汽车设计之中,已成了当今 CAGD 和 CG(计算机图形学)的理论基础.人们发现,所谓 Bézier 曲线(曲面)只不过是向量值形式的一元(二元)Bernstein 多项式,而 Bézier 的成功之点乃是他充分地利用了 Bernstein 多项式的"保形性质"——这恰好是传统的数学分析教材中不曾谈到的.

第10章介绍了 Bernstein 多项式的一致逼近性质,这是因为它在理论上确实有着重要的地位;同时第5章还研究了它的保形性质,而作为曲线理论的一部分内容,在第8章中讲述了 Bézier 曲线.这是数学科学同当代 GAGD 与 CG 技术的一个接口.根据我们的经验,在课堂上讲述这一部分内容时气氛最为活跃,最能激起学生的热情和兴趣.他们可以在电脑上根据 Bézier 的方法随心所欲地设计自己的曲线,亲身感受到数学理论的威力.

4. 在空间解析几何和过去的多变量函数理论中,学生都要学习曲面.但到后来,到底还有多少曲面能留在头脑之中?无非是椭球面、抛物面、马鞍面……在本书第15章中,我们介绍了 Bernstein-Bézier 曲面,它是当代 CAGD 和 CG 生成曲面的重要工具.在 Bernstein 多项式诞生半个世纪之后,是工程师而不是职业数学家为它找到了实际的应用;而工程师们提出的"控制多边形"这种非常生动的几何概念,又被数学家发展成为研究多元逼近理论的有力方法.数学理论的深入和工程技术的发展相互促进和推动的例子屡见不鲜,Bernstein 多项式和

GAGD,CG之间的关系,就是这方面的一个有说服力的例证.

5. 在本书的第10章中,当我们用Van der Waerden方法构造处处连续而处处不可微的函数之后,介绍了"分形几何"的大意.传统的数学分析只是把这个例子当成一个"反例",当作怪物.而我们在这里试图告诉学生:在自然界和社会的现象中,到处存在着这种不规则、不光滑的东西.

6. 混沌理论、CAGD和CG技术、分形几何等都是当代应用数学的十分活跃的分支,都已形成了各自的完整体系.对这些材料我们是如何选择的呢?我们的原则是:

(1) 只在这些学科的"生长点"上进行讨论,"点到为止";

(2) 不作一般的空泛的叙述和议论,务必让学生从中学到实质性的数学思想和技巧;

(3) 所涉及的数学必须是"纯微积分的",不再牵扯任何其他高深知识;

(4) 涉及的数学推导必须是简洁的和优美的.

为做到以上几条,特别是后三条,我们必须去搜寻那些初等和简洁的证明.其中有一些经过了我们的再次加工.例如,Bernstein算子"磨光性质"的Kelisky-Rivlin定理(Pacific J. of Math.,1967),原先的证明用到了矩阵的特征值和特征向量,而我们的初等证明,只有短短的几行.

7. 对于经典的定理和理论,我们也做了一些新的处理.利用CAGD中的"混合函数"(blending functions)方法,把微分学的Lagrange中值定理、Cauchy定理一直到Taylor公式的证明,统一到一种风格之下,变得较为简洁.在证明Van der Waerden函数处处连续而处处不可导的时候,我们采用几何方法,这种方法既是非常严格的,同时又免去了传统的证明中一系列烦琐的区间表示.

8. 精选了例题和习题.我们更换了不少例题,对于保留下来的例题,也尽量寻找比较简单的解法.凡是一个例题也能用初等方法来解决的,同时也列出了初等的解法,以引导和鼓励读者尽可能用最少的知识来解决问题.特别应当提到的是:我们补充了大量的习题,其中一部分有一定的难度.我们把习题分作两大类:练习题和问题,前者是基本的定理和理论的直接应用,一般不需要太多的技巧,而后者则有相当的挑战性.也许我们认为较难的题目,一些聪明的学生,可能给出很简单的解法.有些习题同时也是正文的扩充,是本书的一个有机组成部分.

9. 在写作风格上,我们很不赞成一些数学书中的所谓"标准写法",那些语言像是一封电码,没有任何感情色彩.我们力图把读者当成自己的朋友,平等对话,娓娓谈心.

本书与过去已有的同类教材相比有着较大的差别,内容有不少更新,篇幅也随之加大.究竟该讲授些什么,不讲什么,一个有经验的教师完全可以针对受教育者的情况和允许的教学时数作出取舍.文字可以多写,讲课可以少讲,给学生

留有自己阅读的余地.

习题的分量是过多了一些,这也要请任课的老师们根据学生的情况适当地选择.初学者应当在教师的指导下做练习,不必题题都做;更不要因为有几个题目做不出来而失去信心.

本书是在1998年江苏教育出版社出版的《数学分析教程》的基础上作了较大的改动编写而成.经过几年的教学实践,我们发现原书第二册中的隐映射定理、逆映射定理对初学者较难,这次修订把这些内容和较易接受的无穷级数和反常积分交换了次序,使学生在最后一学期才遇到这些较难的概念.一些定理的证明简化了,例如关于可积性的Lebesgue定理,现在的证明比原书更简单了.原书中的"问题"使不少读者望而却步,这次修订删去了一些过于困难的题目,同时增加了一个附录"问题的解答或提示",目的是使有志于做一些难题的读者知道从何处入手.

在写作本书的时候,我们参考了国内外与数学分析相关的许多优秀著作,在此恕不一一列名致谢.

在写作本书的时候,得到了中国科学技术大学主管教学的负责同志和数学系负责同志的热情鼓励和大力支持,作者们谨在此对他们表示诚挚的感谢.有着数学分析课程多年辅导经验的王建伟同志,对本书的写作提出了许多宝贵的意见,并为本书增添了许多习题,使本书增色不少.

囿于作者们的水平和经验,缺点和错误在所难免.欢迎广大读者对本书多提意见.

常庚哲　史济怀

2002年9月

于中国科学技术大学

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》。行为人将承担相应的民事责任和行政责任,构成犯罪的,将被依法追究刑事责任。社会各界人士如发现上述侵权行为,希望及时举报,本社将奖励举报有功人员。

现公布举报电话及通讯地址:

电　　话:(010) 84043279　13801081108

传　　真:(010) 64033424

E-mail:dd@hep.com.cn

地　　址:北京市东城区沙滩后街55号

邮　　编:100009

策划编辑　王　瑜

加工编辑　胡乃冏

封面设计　于　涛

责任绘图　朱　静

版式设计　马静如

责任校对　杨雪莲

责任印制　杨　明

目　　录

上册目录

第1章　实数和数列极限

粗略地说，数学由三个大的分支组成：几何学、代数学和分析学．它们有着各自的研究对象、内容和方法，同时又互相依赖和渗透．分析学是从“微积分”开始的．虽然在古代，已经产生了微积分的朴素的思想．但是作为一门学科，则建立于17世纪下半叶．在这一方面，英国、法国和德国的数学家们做出了杰出的贡献．创立微积分的大师们着眼于发展强有力的方法，他们虽然解决了许多过去被认为是无法攻克的难题，却未能为自己的方法奠定无懈可击的理论基础．这就引起了长达一个多世纪的混乱和争论，直到19世纪初才玉宇澄清，一切混乱、误解的阴霾才为之一扫．这主要是由于有了严格的极限理论，以及这一理论所依赖的“实数体系的连续性”得以确立．

本书书名为《数学分析教程》，正是研究微积分学的原理和应用，因此我们得从实数理论和数列的极限理论谈起．

§1.1　数　　轴

数轴是表示实数的一种几何方法．数轴的重要性在于使各数之间的某些关系以及对它们所进行的某些运算变得形象化．

设想在我们面前画着一条水平的直线（图1－1）．我们任意地在这直线上选定一点，记为O，称它为**原点**；在原点的右方的直线上，取定一点，把O到这一点的距离定为**单位长度**，这一点用数1来表示．这样，这直线上的每一个点都可以用一个数来表示．如果这个点在点O的右边，用正数来表示；这个点若在点O的左边，则用负数来表示；表示原点O的数是数0．用这种方法，就把实数的全体同这条直线上的点一对一地对应了起来．这条直线称为**数轴**．从此以后，我们将数轴上的点与它所对应的数等同起来，不加区别．

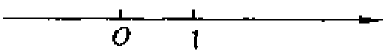

图1－1

不等式在数轴上的表示是非常形象的：$a<b$意即a是在b的左边．设$a<b$，所有在a与b之间的点的集合称为**开区间**，我们写为

$$(a,b)=\{x:a<x<b\}.$$

闭区间$[a,b]$是由开区间(a,b)添上两个端点a与b而成的，即

$$[a,b]=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}.$$

半开(或**半闭**)的区间可以类似地定义,记为$(a,b]$或$[a,b)$.实数的全体记为$\mathbf{R}$,用$(-\infty,+\infty)$表示,也称为区间.此外,当$a\in\mathbf{R}$时,定义

$$(-\infty,a]=\{x\in\mathbf{R}:x\leqslant a\},$$
$$(a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}:x>a\},$$

如此等等.开区间中所有的点,称为该区间的**内点**,对于闭区间$[a,b]$,半开半闭的区间$(a,b]$或$[a,b)$,点$x\in(a,b)$称为它们的**内点**.

一个数x的**绝对值**是指它到原点的距离,记为$|x|$.当$x\neq0$时,绝对值为$|x|$的点有两个,即x与$-x$.点x与y之间的距离是$|x-y|$.因此,以a与b为端点的开区间(或闭区间)的**长度**是$|a-b|$.

对任何实数x与y,我们有

$$-|x|\leqslant x\leqslant|x|,\ -|y|\leqslant y\leqslant|y|.$$

把这两个不等式相加,得出:

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|.$$

这等价于

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

最后这个不等式称为**三角形不等式**.别看它形式简单,但却非常重要,有众多的用处.容易证明:式中等号成立的条件是x与y中至少有一个等于0,或者x与y有相同的正负号.

在中学里,大家已经学习过**有理数**.任何有理数都可以表示为两个整数之商:

$$r=\frac{p}{q},$$

上式中p,q都是整数,且$q\neq0$.大家还知道:有理数经过加、减、乘、除(除数不能是0)四则运算之后仍为有理数.据此,称全体有理数组成一个**数域**.就是说,仅仅通过四则运算,我们不可能从有理数而得到别样的东西.

在数轴上很容易地表示一个有理数.设q是任意给定的正整数,把单位长度分成q等份,找出代表$\frac{1}{q}$的那一点;从而,对任何整数p,便不难找出代表$\frac{p}{q}$的那一点.对于固定的正整数q,如今让p遍取所有的整数,那么$\frac{p}{q}$这些数把数轴分成一些长度为$\frac{1}{q}$的区间.每一个实数x位于这些区间中的一个区间,这就是说,对于任意固定的实数x,一定可找出一个整数p,使得

$$\frac{p}{q}\leqslant x<\frac{p+1}{q},$$

这个不等式等价于

$$0\leqslant x-\frac{p}{q}<\frac{1}{q}.$$

由此得

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q}.$$

由于 q 是任意取定的正整数,我们可以事先把 q 取得充分大,以致使 $\frac{1}{q}$ 小于我们预想的值.上面那个不等式表明:每一个实数都能用有理数去逼近到任意精确的程度.这意味着有理数在数轴上是稠密的.

虽然如此,可是古代希腊人发现了一个令人惊奇的事实:数轴上存在着不能被有理数表示的点.例如说,边长为 1 的正方形的对角线,因其平方等于 $1^2+1^2=2$ 而被记为$\sqrt{2}$,就不是有理数(图 1-2).

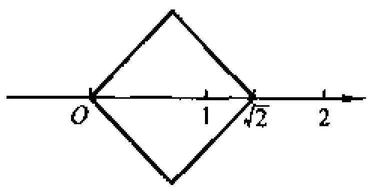

图 1-2

从此以后,我们用 $\mathbf{N}^*$ 来表示正整数的全体.不用多少知识便可以证明:

例 1　设 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 n 不是完全平方数,那么 $\sqrt{n}$ 就不是有理数.

证明　用反证法.假设$\sqrt{n}=\frac{p}{q}$,其中 $p,q\in\mathbf{N}^*$,由于 n 不是完全平方数,故有 $m\in\mathbf{N}^*$,使 $m<\frac{p}{q}<m+1$,由此得到 $0<p-mq<q$.在等式 $p^2=nq^2$ 的双方都减去 mpq,得到 $p^2-mpq=nq^2-mpq$,这等价于

$$\frac{p}{q}=\frac{nq-mp}{p-mq}.$$

令 $p_1=nq-mp,q_1=p-mq$,由 $q_1\in\mathbf{N}^*$ 且 $q_1<q$,所以 $p_1\in\mathbf{N}^*$ 且 $p_1<p$.对等式

$$\frac{p}{q}=\frac{p_1}{q_1}$$

反复地进行同样的讨论,可以得出两串递减的正整数列

$$p>p_1>p_2>p_3>p_4\cdots 与\ q>q_1>q_2>q_3>\cdots$$

使得

$$\frac{p}{q}=\frac{p_1}{q_1}=\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_3}{q_3}=\cdots.$$

这是不可能的,因为从 p 或 q 开始的正整数不可能无止境地递减下去.这就证明了$\sqrt{n}$不可能是有理数.　□

注:上行中所用的记号"□"表示待证明的命题已经证明完毕.

上述证明中所用到的方法,叫做**无穷递降法**.这是在初等数论中常用的一种方法.

数的产生和发展是由计数和量测的需要而促成的.所以,如果我们只局限于有理数的范围,那就不得不承认边长为 1 的正方形的对角线是无法量测的.不言而喻,我们不可能做出这样的结论.因为任何度量几何都不可能建立在这样的基础之上.只能承认,局限在有理数的范围之内,我们无法给数轴上的每一个点规定一个数.也就是说,为了度量的需要,光有有理数还是不够的.这就迫使我们增添一类新数,这种新数我们称之为**无理数**.

练习题 1.1

1. 设 a 为有理数,b 为无理数.求证 $a+b$ 与 $a-b$ 都是无理数.当 $a\neq 0$,ab 与 $\frac{b}{a}$ 也是无理数.
2. 求证:两个不同的有理数之间有无限多个有理数,也有无限多个无理数.
3. 证明:$\sqrt[3]{2}$是无理数.
4. 求证$\sqrt{2}+\sqrt{3}$是一无理数.
5. 在平面直角坐标系中,当 x 和 y 都是有理数时,称点(x,y)为有理点.求证:圆周$(x-\sqrt{2})^2+y^2=2$ 上只有惟一的有理点.
6. 求证:对任何实数 a,b 有不等式
$$||a|-|b||\leqslant|a+b|.$$
7. 设 a,b 为实数,求证:$|ab|=|a||b|$并且当 $b\neq 0$ 时
$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}.$$
8. 利用绝对值的几何意义而不通过计算写出不等式$|x+1|<|x-1|$的解.
9. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为实数,证明不等式
$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|,$$
并指明式中等号成立的条件.
10. 求证:
$$\max(a,b)=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2},$$
$$\min(a,b)=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2},$$

并解释其几何意义.

11. 设 n 个分数 $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}$ 的分母 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都大于零，证明 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ 介于这些分数的最小值和最大值之间.

12. 设 $n=2,3,\cdots,-1<x$ 且 $x\neq 0$,求证:$(1+x)^n>1+nx$.
(提示:用数学归纳法.)

13. 设 $x,y\geqslant 0$, m,n 为正整数,求证
$$x^m y^n + x^n y^m \leqslant x^{m+n} + y^{m+n}.$$
等号当且仅当 $x=y$ 时成立.

问题 1.1

1. 非负整数 a,b 使得 $\frac{a^2+b^2}{1+ab}$ 为整数,求证这个整数必是某一整数的平方.
(本题是 1988 年第 29 届国际数学奥林匹克竞赛的试题,有 11 名中学生给出了正确的证明,我国的 6 名参赛选手中有 2 人此题得了满分.)

2. 设 n 为正整数且 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$,求证当 $n>1$ 时,
$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$
等号当且仅当 $x=y$ 时成立.

3. 若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 并且 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$,证明 Tchebycheff 不等式
$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i \leqslant n\sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

4. 若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$, $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$ 并且 $b_1+b_2+\cdots+b_n=0$,求证 $\sum_{i=1}^n a_i b_i\geqslant 0$.

§1.2 无尽小数

在本节里,我们将把实数定义为一个无尽小数.这种方法实际上是测量过程的数学抽象.

整数把数轴分成无穷多个半开区间$[n,n+1)$,数轴上每一个点都只属于这

些区间中的一个.设正实数 a 代表数轴上的一个点,它属于某一个区间 $[n,n+1)$,那么,a 的小数表示的整数部分就是 n,而小数部分是 $a_1a_2a_3\cdots$,即

$$a=n.a_1a_2a_3\cdots.$$

下面说明 $a_1,a_2,\cdots$ 这些数是如何确定的.我们把区间 $[n,n+1)$ 分成 10 个互不相交的左闭右开的半开区间,每一个区间的长度为 $\frac{1}{10}$.数 a 只能属于那 10 个区间中的一个,比如说属于

$$\left[n+\frac{a_1}{10},n+\frac{a_1+1}{10}\right).$$

这便确定了 a 的小数点之后的第一位数字 a_1.小数点之后的第二位数字 a_2 也是这样确定的,即再把上述区间分成 10 个相等的左闭右开的子区间,再看 a 属于其中的哪一个,如此等等.将上述步骤反复地进行下去,就把数 a 表示成为无尽小数.注意:在这种构造方法中,不会出现无尽小数表示里从某一位起以后的各位数字均为 9 的情况.

现在,我们可以摆脱任何的直观的几何思考,而简单地说:**实数**就是无尽小数.

实数的无尽小数表示的方便之处是:它可用来容易地比较两个数的大小.例如,我们问:两个数 $\frac{17}{20}$ 与 $\frac{45}{53}$ 中,哪一个比较大? 它们的接近程度如何? 只有那些算术能力很强的人,才能够不经过"通分"这一费事的过程把它们写成

$$\frac{901}{1\ 060}与\frac{900}{1\ 060}$$

而断言第一个数比第二个数大,但大得不多,不超过千分之一.但是,当这两个数已表示成了无尽小数的形式

$$\frac{17}{20}=0.850\ 00\cdots,\frac{45}{53}=0.849\ 05\cdots,$$

任何人都能一眼看出上述的结论。

这一个具体的数值例子,实际上是告诉了我们比较两个正数的大小的可行的办法.设想它们已经被表示为无尽小数,我们将它们上、下排列并将小数点对齐,从左到右地比较对应位置上的数字,并看在哪一位上的数字开始不同,我们便知道哪一个数较大.

在中学里,大家已经知道,有理数的特征是它或是有尽小数,或是循环的无尽小数.由于有尽小数可以写成从某位起以后的数字全为 0 的无尽小数,所以我们可以说**有理数**是循环的无尽小数.这样,我们称不循环的无尽小数为**无理数**.在这个意义上,全体无尽小数就称为**实数**.数轴上的任何一点,都可以用一个实

数来表示;每一个实数也对应着数轴上的一个点(严格来说,这一事实只有在证明了闭区间套定理——即定理 1.9 才能成立.).简略地说,全体实数正好铺满了数轴.这一事实称为**实数的连续性**.

定义实数的方式有好多种.通过无尽小数来定义实数只是其中的一种,而且是比较简单和直观的一种,因为它同通常的测量过程相关.需要指出的是,实数的连续性和数轴的连续性是一回事,这实际上是一条公理.我们并未涉及实数公理化的研究,因为我们觉得对于学习数学分析来说,这里介绍的基本内容已经够用了.

练习题 1.2

1. 证明:任何有理数都可以表示为有尽小数或无尽循环小数,无尽循环小数一定是有理数.
2. 0.101 001 000 100 001 0…是有理数还是无理数?
3. 化下列循环小数为分数:

$$0.249\,99\cdots;0.\dot{3}7\dot{5};4.\dot{5}1\dot{8}.$$

4. 逐步地写下所有的正整数以得到下列的无穷尽小数

$$0.123\,456\,789\,101\,112\,131\,4\cdots,$$

问它是有理数吗?

5. 求证

(1) 若 $r+s\sqrt{2}=0$,其中 r,s 是有理数,则 $r=s=0$.

(2) 若 $r+s\sqrt{2}+t\sqrt{3}=0$,其中 r,s,t 是有理数,则 $r=s=t=0$.

6. 设 $n\geqslant 2$,实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都大于 -1,并且它们有着相同的符号,求证:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)>1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

7. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 2)$都是正数且 $a_1+a_2+\cdots+a_n<1$.求证:

(1) $$\frac{1}{1-\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}>\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)>1+\sum_{k=1}^{n}a_k;$$

(2) $$\frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}>\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)>1-\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

问题 1.2

1. 已知：素数的个数是无限的. 考虑无尽小数 $x=0.a_1a_2a_3\cdots$，其中

$$a_n=\begin{cases}1, & \text{如果 } n \text{ 为素数;}\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}$$

问：x 是有理数吗？

2. 已知圆周率 $\pi=3.141\ 592\ 653\ 589\ 7\cdots$. 求证：若正有理数 p/q 比 355/113 更接近于 π，则 $q>16\ 586$.

§1.3　数列和收敛数列

一个**数列**，正如其词意所表达的，是指一个接着一个并且永无尽头的数的排列. 例如

$$1,2,3,\cdots,n,\cdots,$$

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots,$$

$$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$$

都是数列. 数列的最一般的表示是

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots.$$

其中，a_n 中的下标 n 指明了这一项在数列中的位置. a_n 被说成是这个数列的第 n 项，也称作数列的**通项**. 为节约书写起见，数列常常记为 $\{a_n\}$，这里的下标 n 依次地跑过正整数集 $\mathbf{N}^*$. 下标 n 不具有实质性的意义，这样的符号称之为**哑符号**. 所以，上述数列也可以记为 $\{a_m\}$，下标 m 依次地跑过正整数集 $\mathbf{N}^*$. 注意：数列中可以出现若干相等的项，甚至所有的项都可以相等.

在数列中，特别值得重视的是所谓“**收敛数列**”. 粗略地讲，收敛数列具有这样的性质：当 n 变得越来越大时，项 a_n 就越来越接近某一个常数 a. 这种现象在实际中是经常出现的. 我们可以人为地作出下面这个收敛数列的例子：

$$a_1=0.300\ 00\cdots,$$

$$a_2=0.330\ 00\cdots,$$

$$\cdots\cdots,$$

$$a_n = 0.\underbrace{333\ 33\cdots 330}_{n\text{个}}\cdots,$$

$$\cdots\cdots$$

很明显，当 n 越来越大时，项 a_n 将与实数 $0.333\cdots = \frac{1}{3}$ 越来越近.

我们不得不承认，上述关于收敛数列的说法，不但含糊不清，而且会招致误解.什么叫做“越来越大”？什么叫做“越来越近”？如果只停留在这种说法上，任何科学的、有价值的讨论都不可能进行下去.我们必须给出一个明确的定义.

定义 1.1 设 $\{a_n\}$ 是一个数列，a 是一个实数.如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在一个 $N \in \mathbf{N}^*$，使得凡是 $n > N$ 时都有

$$|a_n - a| < \varepsilon, \tag{1}$$

就说数列 $\{a_n\}$ 当 n 趋向无穷大时以 a 为**极限**，记成

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

也可以简记为 $a_n \to a\ (n \to \infty)$.我们也说数列 $\{a_n\}$ **收敛于** a.存在极限的数列称为**收敛数列**.不收敛的数列称为**发散数列**.

现在再来考察出现在定义 1.1 前的那个数列 $\{a_n\}$.由于

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{3} - a_n\right| &= |0.333\cdots 3\cdots - 0.\underbrace{33\cdots 330}_{n\text{个}}\cdots| \\ &= 0.\underbrace{00\cdots 0}_{n\text{个}}33\cdots = \frac{1}{10^n} \times 0.33\cdots 3\cdots \\ &= \frac{1}{3\times 10^n},\end{aligned}$$

因此对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$（这里记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数），凡是 $n > N$，便有

$$\left|\frac{1}{3} - a_n\right| = \frac{1}{3\times 10^n} < \frac{1}{10^n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

这就严格地证明了当 n 趋向于无穷大时数列 a_n 以 $\frac{1}{3}$ 为其极限.

由于极限是一个十分重要的概念，我们对定义 1.1 应当有更深入的考虑.

1° 在定义 1.1 中，正数 ε 必须是任意给定的，不能用一个很小的正数来代替.所谓“任意”，着重强调的是“任意地小”的方面，而不是“任意地大”那一方面.很明白，如果在定义 1.1 中把“对于任意给定的 $\varepsilon > 0$”改成“对于任意给定的 $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$”，其他的词句不作改变，仍旧可以作为数列收敛的定义.

2° 当正数 ε 给定之后，满足要求的 N 通常是与 ε 有关的.一般说来，当 ε 变

小时，相应的 N 将变大. 很明显，如果 $N\in\mathbf{N}^*$ 满足 $|a_n-a|<\varepsilon$ 的要求，那么 $N+1,N+2,N+3,\cdots$ 都能满足 $|a_n-a|<\varepsilon$ 的要求. 在证明数列收敛的时候，我们重视的是满足条件的 N 的存在性，并不需要找出满足要求的最小的正整数.

这里举几个证明数列极限的例子.

例1 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}=\frac{3}{2}.$$

证明 因为

$$\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{5}{4\sqrt{n}-2}=\frac{5}{2\sqrt{n}+2(\sqrt{n}-1)}$$
$$<\frac{5}{2\sqrt{n}}<\frac{3}{\sqrt{n}},$$

所以，对任意给定的 $\varepsilon>0$，只要取 $N=\left[\frac{9}{\varepsilon^2}\right]+1$，当正整数 $n>N$ 时，便有

$$\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-\frac{3}{2}\right|<\frac{3}{\sqrt{n}}<\varepsilon.\quad\square$$

例2 证明：对任意正数 $\alpha>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0.$$

证明 先设 $\alpha\geqslant1$. 这时

$$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|=\frac{1}{n^\alpha}\leqslant\frac{1}{n}.$$

对任意 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当正整数 $n>N$ 时便有

$$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

这就对于 $\alpha\geqslant1$ 的情形证明了结论.

今设 $0<\alpha<1$，总可以找到 $m\in\mathbf{N}^*$ 使 $m\alpha>1$. 由于 $\left\{\frac{1}{n^{m\alpha}}\right\}$ 收敛于0，故对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 N，使得凡是 $n>N$ 有 $\frac{1}{n^{m\alpha}}<\varepsilon^m$，这等价于 $\frac{1}{n^\alpha}<\varepsilon$. 所以，可以断言：对一切 $\alpha>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0.\quad\square$$

例3 当 $|q|<1$ 时，求证

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

证明 当 $q=0$ 时结论显然成立. 设 $0<|q|<1$,所以

$$\alpha = \frac{1}{|q|} - 1 > 0.$$

由二项式展开,可见

$$(1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \cdots > n\alpha,$$

由此得出

$$|q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n} < \frac{1}{n\alpha}.$$

因此,任给 $\varepsilon>0$,只要取 $N = \left[\frac{1}{\alpha\varepsilon}\right]+1$,则当 $n>N$ 时必有

$$|q^n| < \frac{1}{n\alpha} < \frac{1}{N\alpha} < \varepsilon. \quad \square$$

上题也可用一个更简单的方法来做:要使

$$|q|^n < \varepsilon, \tag{2}$$

即 $n\log|q| < \log\varepsilon$,或者

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log|q|}, \tag{3}$$

因此取 $N = \left[\frac{\log\varepsilon}{\log|q|}\right]$,则当 $n>N$ 时,(3)便成立,因而(2)也成立.

例 4 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.

证明 利用几何平均-算术平均不等式,得到

$$1 \leqslant n^{1/n} = (\underbrace{1\cdots 1}_{n-2\text{个}}\sqrt{n}\sqrt{n})^{1/n} \leqslant \frac{(n-2)+2\sqrt{n}}{n} = 1 + \frac{2(\sqrt{n}-1)}{n}.$$

因此

$$0 \leqslant n^{1/n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

所以,对任给的 $\varepsilon>0$,取 $N = \left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]+1$,凡 $n>N$ 时便有

$$|n^{1/n} - 1| < \frac{2}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{N}} < \varepsilon. \quad \square$$

以上的例子给读者演示了证明数列极限的"$\varepsilon - N$ 方法". 不仅如此,其中例 2,例 3 和例 4 的结论本身,还有重要的用处,最好能将它们记住.

练习题 1.3

1. 用极限定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\sqrt{n}}=0$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}=0$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{5n-10}=\dfrac{2}{5}$； (6) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{99\cdots9}_{n个9}=1$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\dfrac{1}{2}$； (8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\dfrac{1}{3}$；

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\dfrac{\pi}{2}$. (10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\arctan n}{1+n^2}=\dfrac{\pi}{2}$.

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. 举例说明，这个命题的逆命题不真.

3. 设 $\{a_n\}$ 是由整数组成的数列，求证：数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当从某一项起都等于一个常数.

4. 下列陈述是否可以作为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的定义？若回答是肯定的，请证明之；若回答是否定的，请举出反例.

(1) 对于无限多个正数 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}^*$，凡是 $n>N$ 时便有 $|a_n-a|<\varepsilon$；

(2) 对于任意给定的 $\varepsilon>1$，存在 $N\in\mathbf{N}^*$，凡是 $n>N$ 便有 $|a_n-a|<\varepsilon$；

(3) 对于任意给定的正数 $\varepsilon<1$，存在 $N\in\mathbf{N}^*$，凡是 $n>N$ 便有 $|a_n-a|<\varepsilon$；

(4) 对于每一个正整数 k，存在 $N_k\in\mathbf{N}^*$，凡是 $n>N_k$ 便有 $|a_n-a|<1/k$；

(5) 对于任意给定的两个正数 ε 与 δ，在区间 $(a-\varepsilon,a+\delta)$ 之外至多只有数列 $\{a_n\}$ 中有限多项.

5. 用精确语言表达"数列 $\{a_n\}$ 不以 a 为极限"这一陈述.

6. 设 a,b,c 是三个给定的实数，令 $a_0=a,b_0=b,c_0=c$，并归纳地定义

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2}, \\ b_n=\dfrac{c_{n-1}+a_{n-1}}{2}, \qquad n=1,2,3,\cdots. \\ c_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \end{cases}$$

求证：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{3}(a+b+c).$$

---

§1.4 收敛数列的性质

有了数轴，我们就可以用几何的语言来刻画收敛数列. 绝对值不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 等价于

$$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon,$$

而后者正是 $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. 我们称关于 a 对称的开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 为 a 的 **ε－邻域**，这样一来，定义 1.1 就可以用几何语言等价地表达为

定义 1.2 数列 $\{a_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时收敛于实数 a 是指：对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $N\in\mathbf{N}^*$，使得这数列中除有限多项 $a_1, a_2, \cdots a_N$ 可能是例外，其他的项均落在 a 的 ε－邻域中(图 1－3).

定理 1.1 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛，则它只有一个极限. 也就是说，收敛数列的极限是惟一的.

证明 用反证法. 假设收敛数列 $\{a_n\}$ 有两个不同的极限 a 与 b，无妨设 $a<b$. 令 $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}$. 对这个 $\varepsilon>0$，必有 $N_1\in\mathbf{N}^*$，当 $n>N_1$ 时一切 a_n 均在 b 的 ε－邻域内；同时又有 $N_2\in\mathbf{N}^*$，当 $n>N_2$ 时一切 a_n 均在 a 的 ε－邻域内. 因此，当 $n>\max(N_1,N_2)$ 时，一切 a_n 都得同时在这两个开区间内，但因这两个开区间没有公共点(图 1－4)，这就产生了矛盾. 所以，只能有 $a=b$，这就证明了极限是惟一的. □

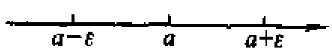

图 1－3

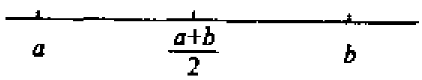

图 1－4

定义 1.3 设 $\{a_n\}$ 是一个数列. 如果存在一个实数 A，使得 $a_n\leqslant A$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立，则称 $\{a_n\}$ **是有上界的**，A 是这数列的一个**上界**.

类似地，可以定义**有下界**的数列.

如果数列 $\{a_n\}$ 既有下界又有上界，则称它是一个**有界数列**.

非常明显的是，数列 $\{a_n\}$ 是有界数列必须且只须它的各项全都包含在同一个有限的区间之内.

定理 1.2 收敛数列必是有界的.

证明 设收敛数列$\{a_n\}$的极限是 a,那么,对于 a 的 1-邻域,必存在 $N\in\mathbf{N}^*$,使得凡是 $n>N$ 时项a_n 都在这个邻域中,不在这个开区间中的至多是 a_1,$a_2,\cdots,a_N$ 这些项.我们完全可以找到一个大一些的区间,它既包含 a 的 1-领域,又包含着 $a_1,a_2,\cdots a_N$,这就证明了数列$\{a_n\}$是有界的.如果有人还希望有更形式化一些的证明,那就是:当 $n>N$ 时有$|a_n-a|<1$,于是

$$|a_n|=|a_n-a+a|\leqslant|a_n-a|+|a|<1+|a|.$$

若令 $M=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_N|+|a|+1$,则对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 有$|a_n|<M$.

□

请注意,这个命题的逆命题是不正确的.我们马上将看到**发散的**有界数列.

定义 1.4 设$\{a_n\}$是一个数列,$k_i\in\mathbf{N}^*$ $(i=1,2,3,\cdots)$且满足 $k_1<k_2<k_3\cdots$,那么数列$\{a_{k_n}\}$叫做$\{a_n\}$的一个**子列**.

由这个定义,$\{a_n\}$自身也可以看作是$\{a_n\}$的子列.

定理 1.3 设收敛数列$\{a_n\}$的极限是 a,那么$\{a_n\}$的任何子列都收敛到 a.

证明 由条件,对任何的 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}^*$,凡 $n>N$ 时便有$|a_n-a|<\varepsilon$.

任取$\{a_n\}$的一个子列$\{a_{k_n}\}$,我们令

$$b_n=a_{k_n},n\in\mathbf{N}^*.$$

由于 $k_n\geqslant n$ 对$n\in\mathbf{N}^*$ 成立,故当 $n>N$ 时有$k_n\geqslant n>N$,因此

$$|b_n-a|=|a_{k_n}-a|<\varepsilon.$$

这正表明$\{b_n\}$收敛到 a. □

这个定理告诉我们:如果数列$\{a_n\}$的两个子列收敛于不同的极限,那么数列$\{a_n\}$是发散的.这个结论通常被用来证明某个数列是发散的.考察数列$\{(-1)^{n-1}\}$,显然它是一个有界的数列,但它不是一个收敛数列.这是因为它的奇数位置上的所有项组成的子数列的极限是 1,而偶数位置上的所有项组成的子数列的极限是 -1.

让我们再看一个例子.

例 1 证明$\{\sin n\}$是发散数列.

证明 根据定理 1.3,我们只要找到一个发散的子列就行了.对每个正整数 n,区间$\left(n\pi+\frac{\pi}{3},n\pi+\frac{2\pi}{3}\right)$的长度是$\frac{\pi}{3}(>1)$,区间内至少有一个正整数,记这个正整数为 k_n,我们证明$\{\sin k_n\}$是一个发散数列.事实上,当 $n=2m$ 是偶数时,$\sin k_{2m}\geqslant\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;当 $n=2m+1$ 是奇数时,$\sin k_{2m+1}\leqslant-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.这说

明$\{\sin k_n\}$的偶数项构成的子数列和奇数项构成的子数列不可能有相同的极限，因而$\{\sin k_n\}$是一个发散数列，由此得知$\{\sin n\}$是一个发散数列. □

定理 1.4(极限的四则运算) 设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都是收敛数列，则$\{a_n \pm b_n\}$，$\{a_nb_n\}$也是收敛数列. 如果$\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$，则$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$也收敛，并且

1° $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$；

2° $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$；

特别地，如果 c 是常数，便有$\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$；

3° $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$(其中$\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$).

证明 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

1° 对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1 \in \mathbf{N}^*$，使得凡是 $n > N_1$ 时有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2};$$

也存在 $N_2 \in \mathbf{N}^*$ 使得凡是 $n > N_2$ 时有

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

所以，当 $n > N = \max(N_1, N_2)$时，以上的两个不等式都能成立，从而有

$$\begin{aligned}|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| &= |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \\ &\leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b.$$

2° 由于$\{b_n\}$是收敛的，它必有界. 这就是说，存在正数 M，使得$|b_n| < M$ 对一切$n \in \mathbf{N}^*$成立. 由于

$$\begin{aligned}|a_nb_n - ab| &= |a_nb_n - ab_n + ab_n - ab| \\ &\leqslant |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| \\ &\leqslant M|a_n - a| + |a||b_n - b|.\end{aligned}$$

因为$\{a_n\}$，$\{b_n\}$分别收敛于 a，b，故对任意 $\varepsilon > 0$，可以找到一个 $N \in \mathbf{N}^*$，使得凡是 $n > N$ 时

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a| + 1)}$$

同时成立(见 1° 之证明，我们没有再去重复那里的细节，以后更是如此). 因此，当 $n > N$ 时

$$|a_nb_n - ab| < M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{|a|\varepsilon}{2(|a|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这表明$\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = ab$.

3° 先来证明当 $b\neq 0$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

对于$\frac{|b|}{2}>0$,存在 N_1,当 $n>N_1$ 时有

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2}.$$

此时有$|b_n|\geqslant |b| - |b_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0$,这表明:在 $b\neq 0$ 的条件下 $\{b_n\}$中至多只有有限多项等于 0. 在 $n>N_1$ 的条件下,

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_nb|} \leqslant \frac{2}{b^2}|b_n - b|.$$

由于 $b_n\to b$,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N_2\in\mathbf{N}^*$,使得当 $n>N_2$ 时有$|b_n - b| < \frac{b^2}{2}\varepsilon$. 因此,当 $n>\max(N_1, N_2)$时便有

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leqslant \frac{2}{b^2}|b_n - b| < \frac{2}{b^2}\frac{b^2}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

这正说明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

再由已证的 2°,便得出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n\left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{a}{b}. \quad \square$$

利用已知的一些简单的收敛数列,借助于上述四则运算性质,便可计算更复杂的一些数列的极限,而不需要使用“$\varepsilon - N$ 推理”. 下面是一些例子.

例 2　计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2 - 3n + 4}{5n^2 + 4n - 1}.$$

解　因为

$$\frac{2n^2 - 3n + 4}{5n^2 + 4n - 1} = \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}}{5 + \frac{4}{n} - \frac{1}{n^2}}.$$

利用§1.3 例 2 的结论,可知所求的极限等于$\frac{2}{5}$. $\square$

例 3 设$|q|<1$,计算极限

$$\lim_{n\to\infty}(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}).$$

解 因为

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q},$$

故得

$$\lim_{n\to\infty}(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})=\frac{1}{1-q}-\frac{1}{1-q}\lim_{n\to\infty}q^n=\frac{1}{1-q}.$$

这里用到了§1.3 例 3 的结果$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$. □

定义 1.5 如果收敛数列$\{a_n\}$的极限等于 0,那么这个数列称为**无穷小数列**,简称**无穷小**.

关于无穷小,有以下的定理:

定理 1.5 1° $\{a_n\}$为无穷小的必要充分条件是$\{|a_n|\}$是无穷小;

2° 两个无穷小之和(或差)仍是无穷小;

3° 设$\{a_n\}$为无穷小,$\{c_n\}$为有界数列,那么$\{c_na_n\}$也是无穷小;

4° 设$0\leqslant a_n\leqslant b_n$, $n\in\mathbf{N}^*$,如果$\{b_n\}$为无穷小,那么$\{a_n\}$也是无穷小;

5° $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的必要充分条件是$\{a_n-a\}$是无穷小.

用定理 1.4 可直接推出 2°. 至于其他 4 条,是极易证明的,留给读者作为练习.

由于无穷小一定是有界的,故由 3° 知道,两个无穷小之积必为无穷小. 但是必须注意,两个无穷小的商未必是无穷小,例如$\left\{\frac{1}{n}\right\}$与$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$之商为$\{n\}$便不是无穷小.

例 4 已知 $a_n\to a(n\to\infty)$,求证:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\to a(n\to\infty).$$

证明 我们只须证明

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a=\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}$$

是无穷小,条件是$\{a_n-a\}$是无穷小. 这表明只需对 $a=0$ 这一特殊情况来证明这个命题就行了.

由于 $a_n\to0(n\to\infty)$,对任给的 $\varepsilon>0$,存在一个正整数 N,凡是 $n>N$ 时便有$|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. 设 $n>N$,这时

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|=\left|\frac{a_1+\cdots+a_N+a_{N+1}+\cdots+a_n}{n}\right|$$

$$\leqslant\frac{|a_1+\cdots+a_N|}{n}+\frac{1}{n}(|a_{N+1}|+\cdots+|a_n|)$$
$$\leqslant\frac{|a_1+\cdots+a_N|}{n}+\left(\frac{n-N}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2}$$
$$<\frac{|a_1+\cdots+a_N|}{n}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 N 已经取定，$|a_1+\cdots+a_N|$ 便是一个有限数.再取整数 $N_1>N$，使得凡是 $n>N_1$ 时有

$$\frac{|a_1+\cdots+a_N|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

可见，当 $n>N_1$ 时有

$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这就证明了当 $a_n\to0(n\to\infty)$时

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\to0.\quad\square$$

定理 1.6(夹逼原理) 设

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n,\ n\in\mathbf{N}^*,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$，那么

$$\lim_{n\to\infty}b_n=a.$$

证明 由条件可知

$$0\leqslant b_n-a_n\leqslant c_n-a_n,$$

并且$\{c_n-a_n\}$是无穷小.由定理 1.5 之 4°，可知$\{b_n-a_n\}$是无穷小.这样便得到：

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)+\lim_{n\to\infty}a_n=0+a=a.\quad\square$$

夹逼原理在计算某些极限的时候非常有用.

例 5 设 $a>0$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}a^{1/n}=1$.

证明 先设 $a\geqslant1$.当 $n>a$ 时，我们有

$$1\leqslant a^{1/n}\leqslant n^{1/n}.$$

在§1.3 的例 4 中，已经证明 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{1/n}=1$.由夹逼原理，知 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{1/n}=1$ 对 $a\geqslant1$ 成立.再设 $a\in(0,1)$，这时 $a^{-1}>1$.于是

$$\lim_{n\to\infty}a^{1/n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{1/n}}=\frac{1}{1}=1.\quad\square$$

例 6 设 $a>1$ 及 $k\in\mathbf{N}^*$，求证：$\left\{\dfrac{n^k}{a^n}\right\}$是无穷小.

证明 先设 $k=1$. 把 a 写成 $1+\eta$，其中 $\eta>0$. 我们有

$$0<\frac{n}{a^n}=\frac{n}{(1+\eta)^n}=\frac{n}{1+n\eta+\dfrac{n(n-1)}{2}\eta^2+\cdots}<\frac{2}{(n-1)\eta^2}.$$

由于$\left\{\dfrac{2}{(n-1)\eta^2}\right\}$，$n\geqslant 2$，是无穷小，可见$\left\{\dfrac{n}{a^n}\right\}$是无穷小. 据等式

$$\frac{n^k}{a^n}=\left(\frac{n}{(a^{1/k})^n}\right)^k,$$

注意到 $a^{1/k}>1$，由方才所述的结果$\left\{\dfrac{n}{(a^{1/k})^n}\right\}$是无穷小. 最后那个等式表明，$\left\{\dfrac{n^k}{a^n}\right\}$可以表为有限个（$k$ 个）无穷小之乘积，所以也是无穷小. □

例 7 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})$.

解 我们有不等式

$$0<\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}=\frac{4}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}\leqslant\frac{4}{\sqrt{n+3}}<\frac{4}{\sqrt{n}}.$$

因为$\left\{\dfrac{4}{\sqrt{n}}\right\}$是无穷小，所以

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})=0. \quad \square$$

例 8 设

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}},$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解 我们有显然的不等式

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<a_n<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

由于

$$1<\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n},$$

由夹逼原理

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1.$$

这样我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1.$$

同理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1.$$

又一次利用夹逼原理,得知

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1.\quad \square$$

在结束本节的时候,我们来叙述并证明一些通过不等式来表达的收敛数列的性质.

定理 1.7 1° 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$\alpha,\beta$满足$\alpha<a<\beta$,那么当$n$充分大时有$a_n>\alpha$;同样,当$n$充分大时有$a_n<\beta$;

2° 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,且$a<b$,那么当$n$充分大时一定有$a_n<b_n$;

3° 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,并且当$n$充分大时$a_n\leqslant b_n$,那么我们有$a\leqslant b$.

证明 1° 令$\varepsilon=a-\alpha>0$.必存在$N\in\mathbf{N}^*$,使得当$n>N$时一切a_n属于a的ε-邻域.因此必有$a-\varepsilon<a_n$,即$a_n>\alpha$对$n>N$时成立.类似地,可证明第二个结论;

2° 令$m=\dfrac{a+b}{2}$,于是$a<m<b$.由1°可知,存在一个$N\in\mathbf{N}^*$,使得当$n>N$时有

$$a_n<m<b_n;$$

3° 用反证法.假设$a>b$.由2°可知存在$N\in\mathbf{N}^*$,使得凡是$n>N$有$a_n>b_n$,这与条件$a_n\leqslant b_n$对充分大的n成立的假设相违背,因此只能是$a\leqslant b$. $\square$

练习题 1.4

1. 回答下列问题:

(1) 若$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都发散,对$\{a_n+b_n\}$与$\{a_nb_n\}$的收敛性能不能作出肯定的结论?

(2) 若$\{a_n\}$收敛而$\{b_n\}$发散,这时$\{a_n+b_n\}$的敛散性如何?

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq0$而$\{b_n\}$发散,这时$\{a_nb_n\}$的敛散性如何?

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$而$b_n$发散,这时$\{a_nb_n\}$的敛散性如何?

(5) 设 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$，问 $\{b_n\}$ 是否必收敛？

2．若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$．举例说明，当 $a = 0$ 时不能得出上述结论．

3．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} - n)^{1/n}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{1/n}$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - n + 2)^{1/n}$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(\arctan n)^{1/n}$；

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}(2\sin^2 n + \cos^2 n)^{1/n}$；

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}((n^2+1)^{1/8} - (n+1)^{1/4})$．

4．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}{1+b+b^2+\cdots+b^{n-1}}$，其中 $|a|<1, |b|<1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{1+2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}|1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n-1}n|$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})$，其中 $|x|<1$．

5．求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n + b^n)^{1/n}$，其中 $0 \leqslant a \leqslant b$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{1/n}$，

这里 $a_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, m$．

6．设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[na_n]}{n}=a,$$

这里$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

7. 设 $a_n>0(n=1,2,3,\cdots)$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,

求证:$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}=a$.

8. 利用上题的结论证明:

(1) 若 $a_n>0(n=1,2,3,\cdots)$且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$;

(2) 当 $a>0$ 时$\lim\limits_{n\to\infty}a^{1/n}=1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{1/n}=1$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{-1/n}=0$.

9. 证明:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}\right)=0$.

10. 如果 $a_0+a_1+\cdots+a_p=0$,求证:

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p})=0$.

(提示:在各项中提取因子$\sqrt{n}$,然后命 $a_0=-(a_1+a_2+\cdots+a_p)$).

11. 用 $p(n)$表示 n 的质因数的个数,例如 $p(1)=0,p(2)=1,p(3)=1,p(4)=1,p(5)=1,p(6)=2,p(7)=1$,等等.求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{n}=0.$$

(提示:把 n 写成质因数的标准分解式,还要用到质数个数是无穷的这一结论.)

12. 设

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right),$$

求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(提示:先证等式$\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1=\frac{1}{n^2}\left(\frac{k}{1+\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}\right)$,其中 $k=1,2,\cdots,n$).

问题 1.4

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，求证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$$

2. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$，求证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0.$$

3. (Toeplitz 定理)设 $n, k \in \mathbf{N}^*$ 时 $t_{nk} \geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk} = 0$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，令 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} a_k$，试证

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} a_k = a.$$

---

§ 1.5 数列极限概念的推广

为了今后讨论的方便，我们有必要将极限的概念加以扩充.

定义 1.6 如果数列 $\{a_n\}$ 适合条件：对任何正数 A，都存在 $N \in \mathbf{N}^*$，使得凡是 $n > N$ 时都有 $a_n > A$，则称数列 $\{a_n\}$ 趋向于 $+\infty$. 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

如果对任何正数 A，都存在 $N \in \mathbf{N}^*$ 使得凡是 $n > N$ 时有 $a_n < -A$，则称数列 $\{a_n\}$ 趋向于 $-\infty$，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

虽然这两种数列按照定义 1.1 是发散的，但是我们在这里还是使用了lim这一记号，用来说明当 n 无限增大时这两种数列有某种确定的变化趋势.

例 1 设 $a_n = n^2 - 3n - 5, n = 1,2,3\cdots$,求证:$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

证明 当 $n\geqslant 9$ 时,我们有

$$a_n = n^2 - 3n - 5 > n^2 - 3n - 5n = n(n-8)\geqslant n.$$

故对任何正数 A,取 $N = \max(9,[A]+1)$,凡是 $n > N$ 时,我们有

$$a\geqslant n\geqslant [A]+1 > A.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. □

定义 1.7 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ 则说 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

无论三种情形

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty, \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

中的哪一种,数列 $\{a_n\}$ 都称为**无穷大**.

无穷大有下列简单的性质:

1° 如果 $\{a_n\}$ 是无穷大,那么 $\{a_n\}$ 必然无界.注意,上述命题的逆命题不成立,例如

$1,0,2,0,3,0,\cdots,n,0,\cdots$

是无界的,但这个数列不是无穷大.但有下面的

2° 从无界数列中一定能选出一个子列是无穷大.

3° 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$(或 $-\infty$ 或 ∞),那么对 $\{a_n\}$ 的任意子列 $\{a_{k_n}\}$ 也有

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = +\infty(\text{或} -\infty,\text{或}\infty).$$

4° 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$,那么

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty, \lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty.$$

上述性质对 $a_n - b_n$ 和 $\dfrac{a_n}{b_n}$ 不再成立,例如 $a_n = n, b_n = n$ 都是无穷大,而 $a_n - b_n = 0, \dfrac{a_n}{b_n} = 1$ 都不是无穷大.

5° $\{a_n\}$ 是无穷大的充分必要条件是 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是无穷小.

上面这些性质的证明都很容易,留给读者作练习.

将全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 连同两个符号 $-\infty$ 与 $+\infty$ 放在一起,以形成扩充的实数系统,我们把这扩充了的系统记作 $\mathbf{R}_\infty$,也就是说,$\mathbf{R}_\infty = \mathbf{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$.

练习题 1.5

1. 设三次多项式 $p(x)=x^3-4x^2+5x-6$，求证：
$$\lim_{n\to\infty}p(n)=+\infty,\lim_{n\to\infty}p(-n)=-\infty.$$

2. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+2+3+\cdots+n)=+\infty$.

3. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=+\infty$.

4. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})=-\infty$.

5. 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)=+\infty$.

6. 设 $a_0=1$，又设 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$，$n=1,2,\cdots$

   求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

问题 1.5

1. 设 $\{a_n\}$ 是一个正数数列，如果
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}+a_{n+2}}{a_n}=+\infty,$$
那么 $\{a_n\}$ 必为无界数列.

§1.6 单调数列

在 §1.4 中我们强调过，有界数列不一定收敛. 在本节中将要引入一类特殊的数列——单调数列，对这类数列而言，有界和收敛是等价的.

定义 1.8 如果数列 $\{a_n\}$ 满足
$$a_n\leqslant a_{n+1},n=1,2,\cdots$$
称此数列为**递增数列**；如果 $\{a_n\}$ 满足
$$a_n\geqslant a_{n+1},n=1,2,\cdots,$$

则称此数列为**递减数列**.如果上面两个不等式都是严格的,即 $a_n<a_{n+1}$(或 $a_n>a_{n+1}$),$n=1,2,\cdots$,则称此数列为**严格递增的**(或**严格递减的**).

递增或递减的数列统称为**单调数列**.

关于单调数列,有下列重要的结果.

定理 1.8　单调且有界的数列一定有极限.

证明　无妨设数列 $\{a_n\}$ 是递增的而且有上界.我们把这个数列的各项表示成十进制无尽小数:

$$a_1=A_1.p_1p_2p_3\cdots,$$
$$a_2=A_2.q_1q_2q_3\cdots,$$
$$a_3=A_3.r_1r_2r_3\cdots,$$
$$\cdots\cdots.$$

其 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 是整数,而 p_i,q_i,r_i 等等是从0到9的数码.现在从上到下考察出整数 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 组成的那一列.因为 $\{a_n\}$ 数列是有界的,这些整数不能无限地增大;又因为这些数列是递增的,那么整数数列 $\{A_n\}$ 在到达最大值之后将保持不变,记这个最大的整数为 A,并设它在第 N_0 行上出现.现在从上往下考察第二列 $p_1,q_1,r_1,\cdots$,不过只需把注意力集中在第 N_0 行和以下的各行上.如果 x_1 是第 N_0 行后出现在这一列上的最大数码,我们设它出现在第 N_1 行上,其中 $N_1\geqslant N_0$.那么 x_1 一旦出现之后将再也不会改变,这是因为 $\{a_n\}$ 是递增数列.接着我们考察第三列的数码 $p_2,q_2,r_2,\cdots$.同样的讨论表明,第三列上的数码将在第 $N_2\geqslant N_1$ 行以及以后的各行上取一个定值 x_2.如果我们对第4列,第5列重复这一过程,就会得到数码 $x_3,x_4,x_5,\cdots$ 和相应的正整数 $N_2\leqslant N_3\leqslant N_4\leqslant\cdots$.容易看出,数

$$a=A.x_1x_2x_3x_4\cdots$$

应该是数列 $\{a_n\}$ 的极限.为了证明这一结论,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,取 $m\in\mathbf{N}^*$ 使得 $10^{-m}<\varepsilon$,那么对所有的 $n>N_m$,a_n 的整数部分以及小数点后的前 m 位上的数码与 a 的是一样的,因此我们有 $|a_n-a|\leqslant10^{-m}<\varepsilon$.这样就用"$\varepsilon$-$N$ 语言"证明了

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A.x_1x_2x_3\cdots.\quad\square$$

这个定理在直观上是很清楚的.如果 M 是递增数列 $\{a_n\}$ 的一个上界,那么 $[M,+\infty)$ 中的一切实数都是这个数列的上界.具有这种性质的最大的区间的左端点就是数列 $\{a_n\}$ 的极限.也就是说,递增数列 $\{a_n\}$ 的"最小上界"是这数列的极限,至于最小上界的精确定义,不久之后再加以细说.

值得注意的是：定理中涉及的极限既不需要预先给定，也不需要预先知道．这里所说的是，在规定的条件下，极限必定存在，我们说这是一种存在性的证明，以后将不断地遇到这种类型的证明．

十分重要的是：这个定理是实数的连续性的一种表现形式．这个定理的成立，有赖于在有理数的基础上添加了无理数；否则，结论不一定总是对的．

我们来看一些例子．

例 1 求数列 $\left\{\frac{a^n}{n!}\right\}$ 的极限，这里 a 是一个任意给定的实数．

解 令 $x_n=\frac{|a|^n}{n!}, n\in\mathbf{N}^*$．当 $n\geqslant|a|$ 时，

$$x_{n+1}=x_n\frac{|a|}{(n+1)}\leqslant x_n.$$

因此 $\{x_n\}$ 从某个确定的项开始是递减的数列，并且显然有下界 0．因此，极限 $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在．在等式 $x_{n+1}=x_n\frac{|a|}{(n+1)}$ 的等号两边令 $n\to\infty$，得到 $x=x\cdot 0=0$．所以 $\{x_n\}$ 为无穷小，从而 $\left\{\frac{a^n}{n!}\right\}$ 也是无穷小． □

例 2 对 $n\in\mathbf{N}^*$，设

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

求证 $\{a_n\}$ 发散．

证明 很明显，$\{a_n\}$ 是严格递增数列，即满足条件

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots.$$

我们只需证明这个数列没有上界，事实上，对 $k\in\mathbf{N}^*$ 有

$$\begin{aligned}
a_{2^k}&=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)\\
&\quad+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\\
&\geqslant 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)\\
&\quad+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\\
&=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{k\text{个}}=1+\frac{k}{2},(k=0,1,\cdots)
\end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}$ 是无界的． □

例 3 对 $n\in\mathbf{N}^*$，设

$$a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha},$$

这里 $\alpha>1$,求证 a_n 收敛.

证明　很明显,$\{a_n\}$是严格递增的数列.由于

$$\begin{aligned}a_{2^k-1}&=1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\cdots+\frac{1}{7^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{8^\alpha}+\cdots+\frac{1}{15^\alpha}\right)\\&\quad+\cdots+\left(\frac{1}{(2^{k-1})^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2^k-1)^\alpha}\right)\\&\leqslant1+\frac{2}{2^\alpha}+\frac{4}{4^\alpha}+\frac{8}{8^\alpha}+\cdots+\frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^\alpha}\\&=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{4^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{1}{(2^{k-1})^{\alpha-1}}\\&=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{k-1}\\&=\frac{1-\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}<\frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}.\end{aligned}$$

至此,已证明$\{a_n\}$有一子例$\{a_{2^n-1}\}$是有上界的.因为$\{a_n\}$是递增数列,由此得知$\{a_n\}$也有上界,从而$\{a_n\}$是收敛数列.　□

在上述例子中,我们只证明了对子任何 $\alpha>1$,数列$\{a_n\}$的极限是存在的,却没有研究其极限值是多少.即使对子 $\alpha=2$ 及 $\alpha=4$ 等等,想要计算数列$\{a_n\}$的极限的精确值,对初学者来说决非易事,我们将在本书的第 12 章中给予解答.

作为定理 1.8 的一个重要应用,我们来证明 §1.2 中曾经提到过的闭区间套定理.它是实数系统连续性的一种表现形式.

定理 1.9(闭区间套定理)　设 $I_n=[a_n,b_n]$,$n\in\mathbf{N}^*$,并且 $I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots\supset I_n\supset I_{n+1}\supset\cdots$.如果这一列区间的长度$|I_n|=b_n-a_n\to0(n\to\infty)$,那么交集$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$ 含有惟一的一点.

证明　由这一列区间的包含关系可知:它们的左端点组成递增的数列$\{a_n\}$,而右端点组成递减的数列$\{b_n\}$.显然,$\{a_n\}$有上界 b_1,而$\{b_n\}$有下界 a_1.因此由定理 1.8,以下的两个极限存在:

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n,b=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

由于 $a_n\leqslant b_n(n\in\mathbf{N}^*)$,可见 $a\leqslant b$.因此,不等式

$$a_n\leqslant a\leqslant b\leqslant b_n$$

对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立.由此式可得

$$0\leqslant b-a\leqslant b_n-a_n=|I_n|.$$

由$|I_n|\to 0(n\to\infty)$可知,我们必有 $a=b$.这时,$a_n\leqslant a\leqslant b_n$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立,即 $a\in I_n(n=1,2,3,\cdots)$.由此得到,$a\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$.显然,点 a 是惟一的. □

应当特别指出:定理中的"闭区间"的"闭"字是不可以去掉的.请看以下的例子:设开区间 $I_n=\left(0,\dfrac{1}{n}\right),n=1,2,3,\cdots$.显然

$$I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots\supset I_n\supset I_{n+1}\supset\cdots,$$

而且$|I_n|=\dfrac{1}{n}\to 0$(当 $n\to\infty$时),但是 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n=\varnothing$,是空集.

练习题 1.6

1. 利用定理 1.8 证明:下列数列极限存在:

(1) $x_n=\dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n+9}{2n-1}$;

(2) $x_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$;

(3) $x_n=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

2. 设 $x_1=\sqrt{2}$,并定义 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$,$n=1,2,3,\cdots$.求证:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

3. 求证:如果单调数列有一子列收敛,那么原数列也必收敛.

4. 设数列$\{a_n\}$适合 $0<a_n<1$,且有不等式$(1-a_n)a_{n+1}>\dfrac{1}{4}$,$n=1,2,3,\cdots$,求证:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{2}$.

(提示:因为有不等式

$$0<a_n(1-a_n)\leqslant\frac{1}{4},$$

根据题设,得$(1-a_n)a_{n+1}>\dfrac{1}{4}\geqslant a_n(1-a_n)$,从而$\{a_n\}$严格递增.)

5. 求证 $a_n=(n!)^{\frac{1}{n}}$是递增的数列.

问题1.6

1. 设 $c>0, a_1=\frac{c}{2}, a_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{a_n^2}{2}, n=1,2,\cdots$，证明

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\begin{cases}1-\sqrt{1-c}, & 0<c\leqslant 1;\\ +\infty, & c>1.\end{cases}$$

2. 数列 $\{u_n\}$ 定义如下：$u_1=b$，

$$u_{n+1}=u_n^2+(1-2a)u_n+a^2, n=1,2,\cdots.$$

问 a, b 为何值时 $\{u_n\}$ 收敛？极限值是什么？

3. 设 $A>0, 0<y_0<A^{-1}$，

$$y_{n+1}=y_n(2-Ay_n), n=0,1,\cdots.$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=A^{-1}$.

4. 数列 $\{a_n\}$ 由下式定义

$$a_n=2^{n-1}-3a_{n-1}, n=1,2,\cdots.$$

求 a_0 所有可能的值，使得 $\{a_n\}$ 是严格递增的.

---

§1.7　自然对数底e

在中学里，我们已经知道，不只是在数学里，而且是在全部科学中，圆周率 π 是一个十分重要的常数. 现在我们来介绍另一个十分重要的常数：自然对数的底 e.

同时考察如下的两个数列：

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n\in\mathbf{N}^*,$$

$$s_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}, n\in\mathbf{N}^*.$$

显然，数列 $\{s_n\}$ 是严格递增的. 并且，由于

$$s_n\leqslant 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

即 $\{s_n\}$ 有上界，从而 $s=\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在.

利用二项式展开，得

$$\begin{aligned} e_n &= 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \\ &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \\ &\quad +\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

这里共有 $n+1$ 个加项.在 e_{n+1} 的类似展开式中,将有 $n+2$ 个加项,在其中的最初 $n+1$ 个加项中每一项都不会小于 e_n 的相同位置上的项,而最后一个加项是一个正数.这就说明:对 $n\in\mathbf{N}^*$,我们有 $e_n<e_{n+1}$,即 $\{e_n\}$ 也是一个严格递增的数列.此外,由 e_n 的展开式中可以看出,

$$e_n\leqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}=s_n<3$$

对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立.这就证明了 $\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}e_n$ 的存在性,并且得知 $\mathrm{e}\leqslant s$.

另一方面,当 $n\geqslant m$ 时,我们有

$$e_n\geqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

把 $m\in\mathbf{N}^*$ 暂时地固定,同时令 $n\to\infty$,由上式知

$$\mathrm{e}\geqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!}.$$

这时再令 $m\to\infty$,得出 $\mathrm{e}\geqslant s$.于是我们证明了 $\mathrm{e}=s$.这个共同的值被记作 e.以 e 作为底而作成的对数称为**自然对数**.为了与大家已经习惯了的以 10 为底的对数符号 lg 区别开来,自然对数符号常记作 ln,也记作 log.在本书中,除了少数显著申明了的情形,我们谈到"对数"都是指自然对数.其中的理由,到第 3 章便可明白.

我们已经证明,数列 $\{e_n\}$ 与 $\{s_n\}$ 都递增地收敛于 e.这两个事实都有理论上的意义.从计算来看,使用极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}$$

更为有利.我们取充分大的 n,用 s_n 来作为 e 的近似值.由于

$$s_{n+1}=s_n+\frac{1}{(n+1)!}=s_n+\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n+1},$$

在计算 s_{n+1} 的时候,就能充分地用上面已经算出的 s_n 的数值,并且只须多作一次除法运算(除以 $n+1$).我们利用计算器,很容易地对 $n\leqslant 10$ 算出 s_n 到小数点后 7 位小数.例如

$$s_8=2.718\,278\,7,$$

$$s_9=2.718\,281\,5,$$

$$s_{10}=2.718\ 281\ 8.$$

由这种近似所产生的误差，可以用下列方法来作估计：由于

$$\begin{aligned}0<s_{n+m}-s_n&=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+m)!}\\&=\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)\cdots(n+m)}\right]\\&<\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}\right)^{m-1}\right]\\&<\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!\ n},\end{aligned}$$

令 $m\to\infty$，得到

$$0<\mathrm{e}-s_n\leqslant\frac{1}{n!\ n},n\in\mathbf{N}^*. \tag{1}$$

因此，用 s_{10} 来逼近 e 所产生的误差将小于 10^{-7}. 特别地，我们看到 $\mathrm{e}<3$.

我们来证明下面的

定理 1.10 自然对数的底 e 是无理数.

证明 用反证法. 假设 $\mathrm{e}=\frac{p}{q}$，其中 $p,q\in\mathbf{N}^*$. 由于 $2<\mathrm{e}<3$，可见 e 不是正整数. 因此 $q\geqslant2$. 由(1)可得

$$0<q!\ (\mathrm{e}-s_q)\leqslant\frac{1}{q}\leqslant\frac{1}{2}. \tag{2}$$

但是

$$q!\ (\mathrm{e}-s_q)=(q-1)!\ p-q!\ \left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)$$

是整数，这与(2)矛盾！ □

通过上述讨论，我们看到，数列 $\{e_n\}$ 与 $\{s_n\}$ 的各项都是有理数，但是它们的极限却是无理数. 我们又一次地看到了在全体有理数中添加无理数的必要性. 如果不这样做，极限运算就无法进行.

练习题 1.7

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-2}\right)^n$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{n}$.　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right)^{4n^2}$;

2. 设 $k\in\mathbf{N}^*$,求证

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}^{k}.$$

3. 求证:数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ 是严格递增数列.

(提示:用算术平均 - 几何平均不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=1\cdot\underbrace{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}_{n个}<\left[\dfrac{1+n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n+1}\right]^{n+1}$).

4. 求证:数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 是严格递减数列.

(提示:$\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}=1\cdot\underbrace{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\cdots\left(\dfrac{n}{n+1}\right)}_{n+1个}<\left[\dfrac{1+(n+1)\dfrac{n}{n+1}}{n+2}\right]^{n+2}$).

5. 证明不等式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\ n\in\mathbf{N}^*.$$

6. 用对数函数 $\ln x$ 的严格递增性质证明

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立.

7. 设 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $k=1,2,\cdots$,证明不等式

$$\frac{k}{n+k}<\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)<\frac{k}{n}.$$

8. 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 求证

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

9. 令

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1),\ n\in\mathbf{N}^*.$$

证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.这极限常记为 γ,叫做 Euler 常数.

10. 由上题得出

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\varepsilon_n.$$

其中$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$，由此得到等式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}=e^{\gamma}.$$

11. 证明不等式

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

12. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{1/n}}{n}=\frac{1}{e}.$$

13. 求证

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!\,n},$$

其中$\frac{n}{n+1}<\theta_n<1$.

14. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(n!\,e-[n!\,e])$.

15. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right).$$

问题 1.7

1. 求证：当 $n\geqslant 3$ 时有不等式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{3}{2n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$$

2. 求证等式

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}=\ln 2\sqrt{n}+\frac{\gamma}{2}+\varepsilon_n,$$

其中 γ 是 Euler 常数，$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

3. 计算极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

4. 记 $H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$. 用 k_n 表示使 $H_k\geqslant n$ 的最小下标，求

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k_{n+1}}{k_n}$.

5. 设 $s_n=1+2^2+3^3+\cdots+n^n$，求证

$$n^n\left(1+\frac{1}{4(n-1)}\right)<s_n<n^n\left(1+\frac{2}{e(n-1)}\right)$$

当 $n\geqslant 3$ 时成立.

§1.8 基本列和收敛原理

在本节中,我们来推导一般的数列收敛的必要充分条件,而不再限于单调数列.

定义 1.9 设$\{a_n\}$是一实数列.对于任意给定的 $\varepsilon>0$,若存在 $N\in\mathbf{N}^*$,使得凡是 $m,n\in\mathbf{N}^*$ 且 $m,n>N$ 时,都有

$$|a_m-a_n|<\varepsilon,$$

则称数列$\{a_n\}$是一个**基本列**或 Cauchy 列.

粗略地说,基本列的特征是:只要数列中两个项充分地靠后,而不论它们的相对位置如何,它们之差的绝对值便可以小到事先任意给定的程度.

在定义 1.9 中,显然只需考虑 $m>n$ 的情形.我们可以令 $m=n+p$.这样一来,我们可以把基本列的定义等价地叙述为:对于任意给定的 $\varepsilon>0$,若存在 $N\in\mathbf{N}^*$,使得凡是 $n>N$ 时都有

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$$

对一切 $p\in\mathbf{N}^*$ 成立时,数列$\{a_n\}$叫做**基本列**.

我们来看几个例子.

例 1 设$|q|<1$,求证$\{q^n\}$是基本列.

证明 §1.3 的例 3 告诉我们,当$|q|<1$ 时,$\{q^n\}$是无穷小.对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}^*$,凡 $n>N$ 时有$|q|^n<\frac{\varepsilon}{2}$.因此,当 $n>N$ 时

$|q^n-q^{n+p}|=|q|^n|1-q^p|\leqslant(1+|q|^p)|q|^n\leqslant 2|q|^n<\varepsilon$ 对任何 $p\in\mathbf{N}^*$ 成立,故$\{q^n\}$是基本列. □

例 2 求证$\{(-1)^n\}$不是基本列.

证明 对于 $\varepsilon_0=1$,对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 总有

$|(-1)^{n+1}-(-1)^n|=|(-1)^n||-1-1|=2>1$,所以$\{(-1)^n\}$不是基本列. □

例 3 令 $a_n=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$,则$\{a_n\}$是基本列.

证明 对任何 $p\in\mathbf{N}^*$,

$$0<a_{n+p}-a_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}$$
$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$
$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)$$
$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

只需 $n>N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$,所以$\{a_n\}$是基本列. □

例 4 当 $\alpha\leqslant 1$ 时,令 $a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}$,则$\{a_n\}$不是基本列.

证明 我们总有

$$a_{n+p}-a_n=\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^\alpha}$$
$$\geqslant\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\geqslant\frac{p}{n+p}.$$

由此可见,对 $n\in\mathbf{N}^*$,总有

$$a_{2n}-a_n\geqslant\frac{n}{n+n}=\frac{1}{2},$$

所以$\{a_n\}$不是基本列. □

本节中心的议题是要证明:一个数列是收敛数列的必要充分条件是它是基本列.为此目的,我们需做一些预备工作.

引理 1.1 从任一数列中必可取出一个单调子列.

证明 先引入一个定义:如果数列中的一项大于在这个项之后的所有各项,则称这一项是一个"龙头".分两种情况来讨论.

情况 1° 如果在数列中存在着无穷多个"龙头",那么把这些可作龙头的项依次地取下来,显然将得到一个严格递减的数列.

情况 2° 设在此数列中只有有限多个项可作"龙头".这时取出最后一个"龙头"的下一项,记作 a_{i_1}.由于 a_{i_1} 不是"龙头",在它的后边必有一项 $a_{i_2}(i_2>i_1)$ 满足 $a_{i_1}\leqslant a_{i_2}$因 a_{i_2} 也不是"龙头",在它的后边也必可找到一项 $a_{i_3}(i_3>i_2)$使得 $a_{i_3}\geqslant a_{i_2}$,如此进行下去就得到子列$\{a_{i_k}\}$,它显然是一个递增的子列. □

定理 1.11(Bolzano - Weierstrass 定理)(列紧性定理) 从任何有界的数列中必可选出一个收敛的子列.

证明 设$\{a_n\}$是一个有界的数列.根据引理 1.1,从中可以取出一个单调的

子列$\{a_{i_n}\}$,这个子列当然也是有界的,利用定理1.8得知$\{a_{i_n}\}$是一个收敛数列. □

现在来证明本节的主要定理.

定理1.12 一个数列收敛的必要充分条件是它是基本列.

证明 必要性.设$\{a_n\}$是一个收敛数列,其极限记作a.因此,对任意给定的$\varepsilon>0$,存在正整数N,凡是$n>N$时便有

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此,当$m,n\in\mathbf{N}^*$,且当$m,n>N$时,可得

$$|a_n-a_m|=|a_n-a+a-a_m|\leqslant|a_n-a|+|a-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这表明$\{a_n\}$是一个基本列.

充分性.设$\{a_n\}$是一个基本列.首先证明基本列必是有界的.对$\varepsilon_0=1$而言,可以取出一个$N\in\mathbf{N}^*$,且当$n>N$时有

$$|a_n-a_{N+1}|<\varepsilon_0=1.$$

由此知

$$|a_n|\leqslant|a_n-a_{N+1}|+|a_{N+1}|<1+|a_{N+1}|.$$

再令

$$M=\max(|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|a_{N+1}|+1),$$

可见$|a_n|\leqslant M$对一切$n\in\mathbf{N}^*$成立.所以$\{a_n\}$是有界数列.

根据定理1.11,从有界数列$\{a_n\}$中可选出一个收敛的子列$\{a_{i_n}\}$.设$a_{i_n}\to a(n\to\infty)$,我们来证明这个a也是数列$\{a_n\}$的极限.由于$\{a_n\}$是基本列,对任给的$\varepsilon>0$,存在一个$N\in\mathbf{N}^*$,使得当$m,n>N$时都有$|a_m-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$.再取定一个$i_k$,其中$k>N$,使得$|a_{i_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}$.由于$i_k\geqslant k>N$,所以凡是$n>N$时我们有

$$|a_n-a|\leqslant|a_n-a_{i_k}|+|a_{i_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

这正说明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. □

定理1.12又称为数列的Cauchy**收敛原理**,是一个在理论上非常重要的定理,在数学分析的全部内容中,有着各式各样的变种.它告诉我们,当我们来判断一个数列是否收敛时,只需通过数列的自身,而无需求助于另外的数.还应指出的是,Bolzano-Weierstrass定理和Cauchy收敛原理都是实数系统连续性的另外两种表现形式.

练习题 1.8

1. 对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}^*$,凡是 $n>N$ 时有

$$|a_n-a_N|<\varepsilon,$$

问 $\{a_n\}$ 是不是基本列?

2. (1) 数列 $\{a_n\}$ 满足

$$|a_{n+p}-a_n|\leqslant\frac{p}{n},$$

对一切 $n,p\in\mathbf{N}^*$ 成立,问 $\{a_n\}$ 是不是基本列?

(2) $|a_{n+p}-a_n|\leqslant\frac{p}{n^2}$ 时又如何?

3. 证明下列数列收敛:

(1) $a_n=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2},n\in\mathbf{N}^*$;

(2) $b_n=a_0+a_1q+\cdots+a_nq^n,n\in\mathbf{N}^*$,其中 $\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$ 为一有界数列,$|q|<1$;

(3) $a_n=\sin x+\frac{\sin 2x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin nx}{n^2},n\in\mathbf{N}^*,x\in\mathbf{R}$;

(4) $a_n=\frac{\sin 2x}{2(2+\sin 2x)}+\frac{\sin 3x}{3(3+\sin 3x)}+\cdots+\frac{\sin nx}{n(n+\sin nx)},n\in\mathbf{N}^*,x\in\mathbf{R}$.

4. 设数列

$$\{|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|\}$$

有界,求证 $\{a_n\}$ 收敛.

5. 用精确语言表示"数列 $\{a_n\}$ 不是基本列".

6. 设 $a_n\in[a,b]$ $(n\in\mathbf{N}^*)$,如果 $\{a_n\}$ 发散,则 $\{a_n\}$ 必有两个子列收敛于不同的数.

§1.9 上确界和下确界

设 E 是一个由实数组成的集合.如果存在一实数 A,使得对任何 $x\in E$ 有 $x\geqslant A$,则称 A 是 E 的一个**下界**;如果存在实数 B 使得对任何 $x\in E$ 有 $x\leqslant B$,那

么 B 叫做 E 的一个**上界**. 如果集合 E 既有下界又有上界, 那么 E 称为**有界集**. 很明显, 当 E 中的元素个数为有限时, E 是一个有界集合, 这时 E 中既有最大的数, 也有最小的数. 当 E 的元素为无限时, 例如 $E=(0,1)$ 时, E 是有界集, 但 E 中没有最大的数也没有最小的数.

设 E 是一个非空的、有上界的集合, B 是 E 的一个上界. 很明白: 一切不小于 B 的实数都是 E 的上界. 这说明, E 的全体上界组成的集合是一个无限集合. 这个无限集合中, 有没有最小的数呢? 回答是肯定的, 这就是所谓的确界原理. 这个原理同样也是实数连续性的一种表现.

定义 1.10 设 E 为一非空的有上界的集合, 实数 β 满足以下两个条件:

1° 对任何 $x\in E$ 有 $x\leqslant\beta$;

2° 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 必可找到一个 $x_\varepsilon\in E$, 使得 $x_\varepsilon>\beta-\varepsilon$.

这时, 称 β 为集合 E 的**上确界**, 记为 $\beta=\sup E$.

由 1°与 2°可见, E 的上确界 β 是 E 的最小上界.

类似地, 可给出

定义 1.11 设 E 为一非空的有下界的集合, 实数 α 满足以下两个条件:

1° 对任何 $x\in E$ 有 $x\geqslant\alpha$;

2° 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 必可找到一个 $y_\varepsilon\in E$, 使得 $y_\varepsilon<\alpha+\varepsilon$.

这时, 称 α 为集合 E 的**下确界**, 记为 $\alpha=\inf E$.

同样可知, E 的下确界是 E 的最大下界.

例如:

$\inf \mathbf{N}^*=1$,

$\inf(0,1)=0$, $\qquad\sup(0,1)=1$,

$\inf\left\{\dfrac{1}{n}:n\in\mathbf{N}^*\right\}=0$, $\qquad\sup\left\{\dfrac{1}{n}:n\in\mathbf{N}^*\right\}=1$,

$\inf\{\arctan x:x\in\mathbf{R}\}=-\dfrac{\pi}{2}$, $\sup\{\arctan x:x\in\mathbf{R}\}=\dfrac{\pi}{2}$.

由这些例子可见, 对于集合 $E=(0,1)$, 它的下确界和上确界都不在 E 中; 对于集合 $E=\{\arctan x:x\in\mathbf{R}\}$, 也是如此. 对于 $E=\left\{\dfrac{1}{n}:n\in\mathbf{N}^*\right\}$, 其下确界不属于 E, 但上确界属于 E.

显然, 若集合 E 中有最大(最小)数 a, 那么 $\sup E(\inf E)=a$.

我们有下列重要的定理.

定理 1.13 非空的有上界的集合必有上确界; 非空的有下界的集合必有下确界.

证明 我们先证明第一个论断.

设非空集合 E 有一个上界 γ. 任取一点 $x\in E$,很明白,E 的最小上界应该在$[x,\gamma]$中寻找. 我们记 $a_1=x,b_1=\gamma$. 用$[a_1,b_1]$的中点$\dfrac{a_1+b_1}{2}$把这个区间一分为二,先看右边那个闭区间中有没有 E 中的点,若有 E 中的点时,将这个区间记为$[a_2,b_2]$,否则将左边那个区间记为$[a_2,b_2]$. 接着再把$[a_2,b_2]$用其中点一分为二,先看右边那个小区间. 若其中有 E 中的点,把它记为$[a_3,b_3]$,否则把左边那个小区间记作$[a_3,b_3]$. 如此这般地继续下去,我们得出了一列闭区间套 $I_n=[a_n,b_n],n\in\mathbf{N}^*$, $I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots$并且$|I_n|=\dfrac{\gamma-x}{2^{n-1}},n\in\mathbf{N}^*$. 这个区间套的其他两个重要的特征是:

1° 在 I_n 右端点的右边再也没有 E 中的点;

2° I_n 总包含着 E 中的点,这里 $n=1,2,3,\cdots$. 根据闭区间套定理,存在惟一的实数 β,使得 $\beta\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$. 我们来证明:$\beta=\sup E$.

注意,$\lim a_n=\lim b_n=\beta$. 任取 $c\in E$,由第一条性质可知:对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 有 $c\leqslant b_n$,令 $n\to\infty$,便得到 $c\leqslant\beta$. 这表明 β 是 E 的一个上界. 由于$\lim a_n=\beta$,故对任给 $\varepsilon>0$,存在一个 $N\in\mathbf{N}^*$ 使得 $\beta-\varepsilon<a_N$,在区间 I_N 中,依第二条性质,一定有 E 中的一点,记为 d. 因此 $d\geqslant a_N>\beta-\varepsilon$,这表明 β 是 E 的最小上界.

第二个论断可以通过第一个论断来证明. 设 E 有下界 m,即对每一个 $x\in E$ 有 $x\geqslant m$. 今定义 $F=\{-x:x\in E\}$,则因 $x\geqslant m$,所以 $-x\leqslant -m$,即 $-m$ 是集合 F 的一个上界,根据第一个论断,F 有上确界,记 $\beta=\sup F$,现在很容易证明 $-\beta$ 就是 E 的下确界. □

定理 1.13 也称为**确界原理**,它也是实数连续性的一种表现形式. 有了确界原理,我们便可以很容易地证明"单调有界数列必有极限"的定理,即定理 1.8. 事实上,设$\{a_n\}$是一个递增的数列,且有上界,由确界原理知 $a=\sup a_n$ 是存在的. 一方面 $a\geqslant a_n$ 对一切$n\in\mathbf{N}^*$成立,另一方面,对任给的 $\varepsilon>0$,一定有一个 a_N $(N\in\mathbf{N}^*)$使得 $a-\varepsilon<a_N$. 由数列的递增性质,有 $a_n\geqslant a_N>a-\varepsilon$ 对 $n\geqslant N$ 成立,即

$$0\leqslant a-a_n<\varepsilon$$

对 $n\geqslant N$ 成立,这正是$\lim a_n=a$.

上面只对有界的集合定义了上确界和下确界. 如果 E 是一个没有上界的集合,我们定义

$$\sup E=+\infty,$$

如果没有下界,则规定

$$\inf E=-\infty.$$

当 E 是一个数列的时候，$\sup E=+\infty$ 等价于从这个数列中可取出一个趋向于 $+\infty$ 的子列；$\inf E=-\infty$ 等价于从中可以选出一个趋于 $-\infty$ 的子列.

练习题 1.9

1. 指出下列数集的下确界和上确界.
   (1) $\{-1,0,3,8,9,12\}$；
   (2) $\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbf{N}^*\right\}$；
   (3) $\{\sqrt{n}:n\in\mathbf{N}^*\}$；
   (4) $\left\{\sin\frac{\pi}{n}:n\in\mathbf{N}^*\right\}$；
   (5) $\{x:x^2-2x-3<0\}$；
   (6) $\{x:|\ln x|<1\}$.
2. 求数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n:n\in\mathbf{N}^*\right\}$ 和 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}:n\in\mathbf{N}^*\right\}$ 的下确界和上确界.
3. 求数列 $\{n^{1/n}:n\in\mathbf{N}^*\}$ 的下确界和上确界.
4. 设在数列 $\{a_n:n\in\mathbf{N}^*\}$ 中，既没有最小值，又没有最大值，求证：数列 $\{a_n\}$ 发散.

§1.10 有限覆盖定理

在这里，我们介绍与实数的连续性等价的最后一个命题. 为此目的，需要引入一些定义.

定义 1.12 如果 A 是实数集，$\mathscr{I}=\{I_\lambda\}$ 是一个开区间族，其中 $\lambda\in\Lambda$，这里的 Λ 称为指标集. 如果

$$A\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda,$$

这时称开区间族 $\{I_\lambda\}$ 是 A 的一个**开覆盖**，或者说 $\{I_\lambda\}$ 盖住了 A.

$\mathscr{I}=\{I_\lambda\}$ 是 A 的覆盖也可以等价地叙述为：任取 $a\in A$，总有 $\mathscr{I}$ 中的一个成员，记为 $I_{\lambda(a)}$，使得 $a\in I_{\lambda(a)}$.

定理 1.14（Heine - Borel 定理） 设 $[a,b]$ 是一个有限闭区间，并且它有一个开覆盖 $\{I_\lambda\}$，那么从这个开区间族中必可选出有限个成员（开区间）来，这有限

个开区间所成的族仍是$[a,b]$的开覆盖(这个定理常称为**有限覆盖定理**).

证明 用反证法.假如定理的结论不成立,那就是说,$\{I_\lambda\}$中任意有限个区间都不能覆盖$[a,b]$.我们用证明定理1.13的所谓"二分法"来导出矛盾.记$a=a_1,b=b_1$,用$[a_1,b_1]$的中点$\frac{a_1+b_1}{2}$把这个区间一分为二:

$$\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right],\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$$

显然,这两个区间中至少有一个不能被$\{I_\lambda\}$中的有限个区间所覆盖,不然的话,$[a_1,b_1]$就能被$\{I_\lambda\}$中有限个区间所覆盖.把那个不能被$\{I_\lambda\}$中有限个区间所覆盖的区间记为$[a_2,b_2]$.再把$[a_2,b_2]$一分为二:

$$\left[a_2,\frac{a_2+b_2}{2}\right],\left[\frac{a_2+b_2}{2},b_2\right],$$

同样道理,其中必有一个不能被$\{I_\lambda\}$中有限个区间所覆盖,把它记为$[a_3,b_3]$.如此可以无限继续下去,得到一列区间$\{[a_n,b_n]\}$, $n=1,2,\cdots$,它们具有下列性质:

(i) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$, $n=1,2,\cdots$

(ii) $b_n-a_n=\frac{1}{2^{n-1}}(b_1-a_1)\to 0$, $n\to\infty$.

(iii) 每个$[a_n,b_n]$都不能被$\{I_\lambda\}$中有限个区间所覆盖.

从(i),(ii)两条性质知道$\{[a_n,b_n]\}$满足闭区间套定理的条件,因而存在惟一的$\eta\in[a_n,b_n]$, $n=1,2,\cdots$,且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\eta. \tag{1}$$

因为$\eta\in[a_1,b_1]=[a,b]$,而$\{I_\lambda\}$是$[a,b]$的开覆盖,故$\{I_\lambda\}$中必有区间(α,β),使得$\eta\in(\alpha,\beta)$.记

$$\varepsilon=\min\{\eta-\alpha,\beta-\eta\}.$$

从(1)可知,必有正整数N_1,N_2,使得当$n>N_1$时,$|a_n-\eta|<\varepsilon$,当$n>N_2$时,$|b_n-\eta|<\varepsilon$,所以当$n>N=\max(N_1,N_2)$时,就有

$$\alpha\leqslant\eta-\varepsilon<a_n<b_n<\eta+\varepsilon\leqslant\beta.$$

这就是说$[a_n,b_n]\subset(\alpha,\beta)$,即$\{I_\lambda\}$中一个区间就覆盖了$[a_n,b_n]$,这与(iii)矛盾. □

必须指出,在定理1.14中若把有限闭区间换成开区间或无穷区间,结论就不再成立.例如$\left\{\left(\frac{1}{n},1\right)\right\}$, $n=2,3,\cdots$是开区间$(0,1)$的一个开覆盖,但不可能从中选出有限个来覆盖$(0,1)$.$\{(0,n)\}$, $n=1,2,\cdots$是无穷区间$(1,+\infty)$的一个开覆盖,从中也选不出有限个来覆盖$(1,+\infty)$.

至此,我们已经介绍了6条定理,即"单调有界数列必有极限"(定理1.8),闭区间套原理(定理1.9),Bolgano-weierstrass定理(定理1.11),Cauchy收敛原理(定理1.12),确界原理(定理1.13)以及有限覆盖定理(定理1.14),这6条定理都是实数系统连续的等价陈述,从其中的任一条定理就可推导出其他的定理.若不将无理数添加到有理数上而组成实数系统,这些定理就不再成立.

上面的讨论说明,将无理数添加到有理数上而组成实数系统是非常重要的,但实数系统仍然有它的不足之处,因为最简单的二次代数方程式 $x^2+1=0$ 在实数系统中没有解.这正像极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$

在有理数系统中不存在那样给我们带来不便.因此,有必要在实数系统之上添加虚单位 i 以构成复数系统,发展出一套在理论上和应用上都十分重要的复数域上的微积分学,这就是我们将来要学习的"复分析"课程的内容.复分析是建立在我们正开始学习的实数域上的微积分理论的基础上的.

问题 1.10

1. 设开区间族 $\{I_\lambda\}$ 是有限闭区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖,则必存在 $\sigma>0$,使得只要区间 $A\subset[a,b]$ 且 A 的长度 $|A|<\sigma$ 时,必有 $\{I_\lambda\}$ 中的一个区间包含 A. σ 称为 Lebesgue 数.
2. 试用上述结论证明有限覆盖定理.

§1.11 上极限和下极限

考察任意给定的数列 $\{a_n\}$.如果它收敛于一个有穷的极限,那么它的任一子列都收敛于这个极限.如果它不收敛于一个有穷的极限,但是有界,按照 Bolzano-Weierstrass 定理,从中可以找出一个收敛的子列.如果 $\{a_n\}$ 无界,那么总可以找到一个子列趋向于 $-\infty$ 或 $+\infty$.我们给出

定义 1.13 设 $\{a_n\}$ 是一个数列,非空的集合

$$E=\{l\in\mathbf{R}_\infty: a_n \text{ 中有子列 } a_{k_n}\to l,\ n\to\infty\},$$

置 $a^*=\sup E$, $a_*=\inf E$,它们分别被称为数列 $\{a_n\}$ 的**上极限**和**下极限**,记作

$$\limsup_{n\to\infty} a_n,\quad \liminf_{n\to\infty} a_n$$

例1　考察数列

$$a_n=\frac{(-1)^n}{1+1/n},n=1,2,3,\cdots.$$

由于

$$a_{2n}=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1}\to 1(n\to\infty),$$

$$a_{2n-1}=-\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{-1}\to -1(n\to\infty),$$

所以 $E=\{-1,1\}$. 从而

$$\liminf_{n\to\infty} a_n=-1,\quad \limsup_{n\to\infty} a_n=1.\quad \square$$

当 E 是一个无穷集合时,就产生一个问题:$a^*=\sup E$ 或 $a_*=\inf E$ 是不是 E 中的元素,即 a^* 或是 a_* 是不是$\{a_n\}$中某个子列的极限? 下面的定理给出了肯定的回答.

定理1.15　设$\{a_n\}$为一数列,E 与 a^* 的意义已在定义1.13中描述.那么,

1° $a^*\in E$;

2° 若 $x>a^*$,则存在 $N\in\mathbf{N}^*$ 使得凡是 $n\geqslant N$ 时便有 $a_n<x$;

3° a^* 是满足前两条性质的惟一的数.

证明　1° 若 $a^*=+\infty$,则此时 E 无上界,从而$\{a_n\}$也没有上界. 所以,从$\{a_n\}$中可选出一子列 $a_{k_n}\to+\infty$(当 $n\to\infty$时),于是我们有 $a^*\in E$.

如果 a^* 是一个有限数,为了证明 $a^*\in E$,必须且只须证明可以从数列$\{a_n\}$中选出一子列收敛于 a^*. 因为 $a^*=\sup E$,故必存在一个 $l_1\in E$,使

$$a^*-1<l_1<a^*+1.$$

l_1 作为$\{a_n\}$的某一子列的极限,一定有正整数 k_1,使

$$a^*-1<a_{k_1}<a^*+1.$$

同理,存在 $l_2\in E$,使

$$a^*-\frac{1}{2}<l_2<a^*+\frac{1}{2},$$

l_2 作为$\{a_n\}$的某一子列的极限,一定有正整数 $k_2>k_1$,使

$$a^*-\frac{1}{2}<a_{k_2}<a^*+\frac{1}{2}.$$

归纳地,可得:对任何 $n\in\mathbf{N}^*$,存在 k_n,适合 $k_n>k_{n-1}>\cdots>k_1$,使

$$a^*-\frac{1}{n}<a_{k_n}<a^*+\frac{1}{n}.$$

由此可知，$\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a^* \in E$.

若 $a^* = -\infty$，那么 E 中只含惟一的元素，即 $E=\{-\infty\}$，这时，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

这样就对所有可能的情况证明了 1°.

2° 假设有一数 $x > a^*$ 使得有无穷多个 n 值满足 $a_n \geqslant x$. 在这种情况下，存在一 $y\in E$ 适合 $y \geqslant x > a^*$. 这与 a^* 的定义相矛盾.

3° 证明惟一性. 设有两数 p 与 q 同时满足 1° 与 2°，且 $p<q$. 选取 x 适合 $p<x<q$. 因为 p 满足 2°，我们有 $a_n<x$ 对 $n\geqslant N$ 成立，但这时 q 不能满足 1°. □

对下极限 a_*，也可以建立类似的定理.

性质 1°表明：数列 $\{a_n\}$ 的上(下)极限正是它的一切收敛的子列的极限所组成的集合中的最大(小)者. 一数列虽然可能没有极限，但它的上极限和下极限却是一定存在的.

我们有

定理 1.16 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是两个数列，

1° $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$；

2° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 当且只当 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$；

3° 若 N 是某个正整数，当 $n>N$ 时有 $a_n \leqslant b_n$ 成立，那么

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} b_n,$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

证明 1°与 2°是十分明显的事实. 我们只证 3°，而且只证其中的第二个不等式，因为对第一个不等式可以作类似的证明. 记

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = a^*,\quad \limsup_{n\to\infty} b_n = b^*.$$

如果 $b^* = +\infty$，不等式自然成立. 如果 $a^* = +\infty$，那么有子列 $a_{k_n} \to +\infty\,(n\to\infty)$，这时也有 $b_{k_n}\to+\infty\,(n\to\infty)$. 所以 $b^*=+\infty$，不等式中的等号成立. 同样，a^* 与 b^* 中有一个为 $-\infty$ 时，结论自然成立. 现在设 a^* 与 b^* 都是有限数. 我们用反证法，设 $b^*<a^*$，取定 x，适合

$$b^* < x < a^*,$$

由定理 1.15 中的 2°，存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时 $b_n<x$，因而当 $n>\max(N, N_1)$ 时，有

$$a_n \leqslant b_n < x < a^*,$$

这与 a^* 的定义不合. □

例 2 设数列 $\{a_n\}$ 满足对一切 $m, n \in \mathbf{N}^*$ 有

$$0\leqslant a_{m+n}\leqslant a_m+a_n,$$

求证:数列$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$存在极限.

证明 任意固定$k\in\mathbf{N}^*$,则一切不小于k的正整数n都可以表示成

$$n=mk+l,l\in\{0,1,2,\cdots,k-1\},$$

这里m为正整数.因此,由题设条件可知

$$\frac{a_n}{n}=\frac{a_{mk+l}}{n}\leqslant\frac{a_{mk}+a_l}{n}\leqslant\frac{ma_k+a_l}{n}$$

$$=\frac{ma_k}{mk+l}+\frac{a_l}{n}=\frac{a_k}{k+l/m}+\frac{a_l}{n}.$$

因为k是固定的,所以,当$n\to\infty$时$m\to\infty$,由此可知

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}\right)\leqslant\frac{a_k}{k}(k=1,2,3,\cdots).$$

在上式中令$k\to\infty$取下极限,得

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}\right)\leqslant\liminf_{k\to\infty}\left(\frac{a_k}{k}\right).$$

这只能是

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}\right)=\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}\right).$$

因为$0\leqslant\dfrac{a_n}{n}\leqslant a_1,n\in\mathbf{N}^*$,所以$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$有界.这说明$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{n}\right)$存在. □

定理1.17 对数列$\{a_n\}$,定义

$$\alpha_n=\inf_{k\geqslant n}a_k,\beta_n=\sup_{k\geqslant n}a_k.$$

那么:1°$\{\alpha_n\}$是递增数列,$\{\beta_n\}$是递减数列.

2° $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=a_*$, $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=a^*$

证明 1° 按定义

$$\alpha_n=\inf\{a_n,a_{n+1},\cdots\},$$

$$\alpha_{n+1}=\inf\{a_{n+1},a_{n+2},\cdots\}.$$

显然有$\alpha_n\leqslant\alpha_{n+1}$.同理有$\beta_n\geqslant\beta_{n+1}$.

2° 我们只证明$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=a^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=a_*$的证明是类似的.

(i) 先设a^*是一有限数.任取$l\in E$,则有$\{a_n\}$的子列$\{a_{i_k}\}$使得$\lim\limits_{k\to\infty}a_{i_k}=l$.对于任意给定的$n$,选取$k\geqslant n$,于是$i_k\geqslant k\geqslant n$,因而

$$a_{i_k}\leqslant\sup\{a_n,a_{n+1},\cdots\}=\beta_n.$$

让$k\to\infty$,即得$l\leqslant\beta_n$.由于l是E中的任意的数,故有$a^*\leqslant\beta_n$.这样$\{\beta_n\}$就是

一个递减且有下界的数列,因而有极限,故得

$$a^{*}\leqslant\lim_{n\to\infty}\beta_{n}. \tag{1}$$

对于任意的 $\varepsilon>0$,由定理 1.15 的 2°,存在 $n_0\in N$,当 $n\geqslant n_0$ 时 $a_n\leqslant a^{*}+\varepsilon$,因此 $\sup\limits_{k\geqslant n_0}a_k\leqslant a^{*}+\varepsilon$,即 $\beta_{n_0}\leqslant a^{*}+\varepsilon$. 由于 $\{\beta_n\}$ 是递减的,故当 $n>n_0$ 时,$\beta_n\leqslant\beta_{n_0}\leqslant a^{*}+\varepsilon$,因而 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n\leqslant a^{*}+\varepsilon$,再让 $\varepsilon\to0$ 得

$$\lim_{n\to\infty}\beta_{n}\leqslant a^{*}. \tag{2}$$

综合(1)与(2),即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=a^{*}$.

(ii) 设 $a^{*}=+\infty$,故有一子列以 $+\infty$ 为极限,于是 $\beta_n=\sup\{a_n,a_{n+1},\cdots\}=+\infty$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=+\infty$.

(iii) 若 $a^{*}=-\infty$,这表示 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$. 故以任意 $G>0$,存在 $n_0\in N$,当 $n\geqslant n_0$ 时,$a_n<-G$,因而

$$\beta_{n_0}=\sup\{a_{n_0},a_{n_0+1},\cdots\}\leqslant -G$$

于是当 $n>n_0$ 时,$\beta_n\leqslant\beta_{n_0}\leqslant -G$,这正是 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=-\infty$. □

定理 1.17 证明了

$$a^{*}=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n}a_k,\quad a_{*}=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geqslant n}a_k.$$

这两个等式常被用来作为上下极限的定义,同时也说明用记号 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf$ 来记上下极限的原因.

练习题 1.11

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup a_n\ (n\in\mathbf{N}^{*})$,设:

 (1) $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$; (2) $a_n=n^{(-1)^n}$;

 (3) $a_n=\arctan n^{(-1)^n}$; (4) $a_n=(1+2^{(-1)^n n})^{1/n}$;

 (5) $a_n=1+n\sin\dfrac{n\pi}{2}$; (6) $a_n=\dfrac{n^2}{1+n^2}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$;

 (7) $a_n=\begin{cases}0, & \text{当 } n \text{ 为偶数;}\\ \dfrac{1}{(n!)^{1/n}}, & \text{当 } n \text{ 为奇数.}\end{cases}$

2. 试证下面诸式当两端有意义时成立:

 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\inf a_n+\lim\limits_{n\to\infty}\inf b_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\inf(a_n+b_n)$

$$\leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n,$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \leqslant \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n)$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n;$$

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，则

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \liminf_{n\to\infty} a_n + b,$$

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + b;$$

(3) $\liminf\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$，$\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$；

(4) 若 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为非负数列，则

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n b_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n,$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n b_n$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n;$$

(5) 若 $\{b_n\}$ 非负，且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，则

$$\liminf_{n\to\infty} a_n b_n = b \liminf_{n\to\infty} a_n,\ \limsup_{n\to\infty} a_n b_n = b \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

3. 有界数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n} + 2a_n) = 0$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. 设 $a_n \geqslant 0, n \in \mathbf{N}^*$，求证 $\limsup\limits_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} \leqslant 1$ 的一个必要充分条件是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{l^n} = 0,$$

其中 l 为大于 1 的数.

问题 1.11

1. 数列 $\{x_n\}$ 有界且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$，令

$$l = \liminf_{n\to\infty} x_n,\ L = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

若记 $S = \{a \in \mathbf{R}$：有子列 $x_{k_n} \to a\ (n\to\infty)\}$，求证：$S = [l, L]$.

2. 设 $a_n > 0$，求证

$$\limsup_{n\to\infty}\ n\left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1\right) \geqslant 1.$$

3. 设 $x_n > 0$，求证：

(1) $\limsup\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_1 + x_{n+1}}{x_n}\right)^n \geqslant \mathrm{e}$；

(2) 上式中的 e 是最佳常数.

§1.12 Stolz 定理

作为上下极限概念的应用，我们来证明计算某种类型极限时很有用的 Stolz 定理.

定理 1.18（Stolz，$\frac{\infty}{\infty}$型） 设$\{b_n\}$是严格递增趋于$+\infty$的数列，如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A, \tag{1}$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A. \tag{2}$$

证明 （i）先设 A 为有限数. 由（1）知道，对任意 $\varepsilon>0$，存在 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$A-\varepsilon<\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}<A+\varepsilon.$$

由此得

$$A-\varepsilon<\frac{a_{n_0}-a_{n_0-1}}{b_{n_0}-b_{n_0-1}}<A+\varepsilon,$$

$$A-\varepsilon<\frac{a_{n_0+1}-a_{n_0}}{b_{n_0+1}-b_{n_0}}<A+\varepsilon,$$

$$\cdots\cdots$$

$$A-\varepsilon<\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}<A+\varepsilon,$$

因而有

$$A-\varepsilon<\frac{a_n-a_{n_0-1}}{b_n-b_{n_0-1}}<A+\varepsilon,$$

即

$$A-\varepsilon<\frac{\dfrac{a_n}{b_n}-\dfrac{a_{n_0-1}}{b_n}}{1-\dfrac{b_{n_0-1}}{b_n}}<A+\varepsilon.$$

于是得

$$(A-\varepsilon)\left(1-\frac{b_{n_0-1}}{b_n}\right)+\frac{a_{n_0-1}}{b_n}<\frac{a_n}{b_n}<(A+\varepsilon)\left(1-\frac{b_{n_0-1}}{b_n}\right)+\frac{a_{n_0-1}}{b_n}.$$

由此即得

$$A-\varepsilon\leqslant\liminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\leqslant A+\varepsilon.$$

再让 $\varepsilon\to0$ 即得

$$A\leqslant\liminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\leqslant A.$$

由此即知(2)成立.

(ii) 设 $A=+\infty$,由(1)知,当 n 充分大时有 $a_n-a_{n-1}>b_n-b_{n-1}>0$,因而 $\{a_n\}$ 也是严格递增趋于 $+\infty$ 的数列.现在把(1)写成

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-b_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}=0,$$

由刚证明的(i)知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=0$,因而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=+\infty$.

(iii) 设 $A=-\infty$.记 $c_n=-a_n$,那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n-c_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=+\infty,$$

由(ii)知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_n}{b_n}=+\infty$,因而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=-\infty$. □

例 1 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}=a$.

证明 这个命题在§1.4的例3中已经证明过,现在用 Stolz 定理来证特别简单.命

$$a_n=x_1+\cdots+x_n,\ b_n=n,$$

那么 $\{b_n\}$ 是严格递增趋于 $+\infty$ 的数列,故可用 Stolz 定理.现在

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}x_n=a,$$

由 Stolz 定理马上得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=a.$$

这里允许 $a=+\infty$ 或 $-\infty$,而在§1.4的例3中 a 只能是有限数. □

例 2 设 k 为正整数,计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$$

解　命　$a_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k, b_n = n^{k+1}$. 那么

$$b_n - b_{n-1} = n^{k+1} - (n-1)^{k+1} = (k+1)n^k + \cdots + (-1)^{k+1},$$

所以,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(k+1)n^k + \cdots + (-1)^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

由 Stolz 定理,所求的极限为$\frac{1}{k+1}$. □

练习题 1.12

1. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$$

2. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}{\ln 2\sqrt{n}}$$

3. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

4. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$$

5. 计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2}$.(提示:取对数.)

6. 计算极限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}$$

7. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$,证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

8. 举例说明 Stolz 定理的逆命题不成立.

9. 证明$\frac{0}{0}$型的 Stolz 定理:设 $a_n\to 0, b_n\to 0$ 且 $b_1 > b_2 > b_3 > \cdots$. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A,$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A.$$

问题 1.12

1. 设 $0<x_1<\frac{1}{q}$，其中 $0<q\leqslant 1$ 并且 $x_{n+1}=x_n(1-qx_n)$，$n\in\mathbf{N}^*$．求证：$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=\frac{1}{q}$．

2. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=1$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{3n}a_n=1$．

3. 令
$$x_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\ln\binom{n}{k},n=1,2,3,\cdots,$$
求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．

4. 设 $x_1=\sin x_0>0$，$x_{n+1}=\sin x_n$，$n>1$，证明
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n=1.$$

5. $y_1=c>0$，$\frac{y_{n+1}}{n+1}=\ln\left(1+\frac{y_n}{n}\right)$，$n\geqslant 1$．求 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$．

§1.13 数列极限的应用

虽然数列的极限有众多的应用，但这里只列举在三个不同方面应用的例子．

1．方程的数值解

我们已经说过，$\sqrt{2}$是无理数．目前的问题是，如何用有理数来逼近$\sqrt{2}$，以达到事先指定的精确度？$\sqrt{2}$是二次方程 $x^2-2=0$ 的正根，所以我们的问题可以说成是求方程的"数值解"．

把问题提得更一般一些．设 $a>0$ 是任意给定的，我们来求$\sqrt{a}$的近似值．给定$\sqrt{a}$的一个近似值$x_0>0$．在两个正数 x_0 和$\frac{a}{x_0}$中，一定有一个大于$\sqrt{a}$另一个小

于$\sqrt{a}$,除非 x_0 正好就是$\sqrt{a}$.有理由指望这两个数的算术平均值

$$x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{a}{x_0}\right)$$

可能更加靠近$\sqrt{a}$,这便得到了更好的近似.事实上,

$$x_1-\sqrt{a}=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{a}{x_0}\right)-\sqrt{a}=\frac{1}{2x_0}(x_0^2+a-2x_0\sqrt{a})$$

$$=\frac{1}{2x_0}(x_0-\sqrt{a})^2\geqslant 0,$$

这表明:不论初值 x_0 如何,得出的第一次近似值 $x_1(\geqslant\sqrt{a})$是过剩近似值.不妨设初值 x_0 本身就是过剩的近似值,因此 $x_0>x_0-\sqrt{a}>0$,由此得到

$$0\leqslant x_1-\sqrt{a}=\frac{1}{2}(x_0-\sqrt{a})\frac{(x_0-\sqrt{a})}{x_0}\leqslant\frac{1}{2}(x_0-\sqrt{a}).$$

这个不等式告诉我们:第一次近似值 x_1 到$\sqrt{a}$的距离至多是初值 x_0 到$\sqrt{a}$到的距离的一半.

重复施行上述的步骤,便产生数列 $x_0,x_1,\cdots,x_n,\cdots$,其中

$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right),n\in\mathbf{N}^*.$$

由

$$0\leqslant x_n-\sqrt{a}\leqslant\frac{1}{2}(x_{n-1}-\sqrt{a})\leqslant\frac{1}{2^2}(x_{n-2}-\sqrt{a})\leqslant\cdots$$

$$\leqslant\frac{1}{2^n}(x_0-\sqrt{a}),$$

可见$\lim x_n=\sqrt{a}$.对于充分大的 n,数 x_n 与$\sqrt{a}$的距离要多小就可以有多小.

让我们看看这种手续实际应用起来到底有多方便,设想我们需求$\sqrt{2}$的近似值.取初值 $x_0=2$(这是相当粗糙的近似值),反复迭代的结果是

$$x_0=2.0,x_1=1.5,x_2=1.416\,6\cdots,$$

$$x_3=1.414\,256\,6\cdots,$$

$$x_4=1.414\,213\,56\cdots,$$

$$x_5=1.414\,213\,56\cdots,$$

这已是相当精确的近似值.

2. 计算面积

在中学里,大家学习过如何计算矩形、梯形、三角形的面积.有了这些,计算

由直线围成的图形的面积也没有本质的困难，因为可以把直线形分割成有限个三角形．在由曲线围成的图形里，大家只学习过计算圆的面积．

现在我们提出这样的问题：求被抛物线 $y=x^2$ 和两直线 $y=0$(即横轴)与 $x=1$所围成的图形的面积．应当特别注意的是，对于任意曲线围成的图形来说，它的"面积"我们还没有在任何地方作过定义．在初等几何里，仅仅对于被直线围成的图形以及圆规定了面积的概念．所以，当前我们面临着双重的任务：第一是对所说的图形的面积作出一个合理的规定；第二是把这个面积计算出来．

以下的想法并不是什么新鲜的东西，古希腊人早就有所领悟；我国魏末晋初时的数学家刘徽，在由他详细整理过的《九章算术》(公元 263 年)中明确地使用这种思想来计算圆的面积．

将区间$[0,1]$等分为 n 个小区间$\left[0,\frac{1}{n}\right],\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right],\cdots,\left[\frac{n-1}{n},1\right]$，它们的长度都是$\frac{1}{n}$．以这些小区间为底边，分别以 $0,\left(\frac{1}{n}\right)^2,\left(\frac{2}{n}\right)^2,\cdots,\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$ 为高，作 n 个矩形(图 1-5)．

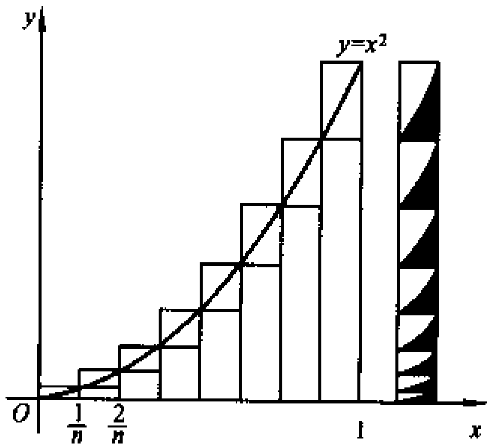

图 1-5

这 n 个矩形的面积之和是

$$\begin{aligned}A_n&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2\\&=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1}i^2=\frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\\&=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{3n}\right).\end{aligned}$$

这样，我们就定义了一个数列$\{A_n\}$．对每一个 A_n 面言，它都小于欲求的"面

积",但是这两者之间的差别也不会大于长为 1,宽为 $\frac{1}{n}$ 的矩形面积,即 $\frac{1}{n}$. 所以,当 n 越来越大时,A_n 将越来越接近欲求的"面积". 因此,对当前的这个图形,我们可以把它的面积定义为

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{3}.$$

这样,我们一揽子地解决了双重任务:既规定了面积的意义,同时又完成了面积的计算.

这种想法既简单又朴素,但它却孕育了数学分析的一个重要部分:积分学. 研究积分学将是本书的一个重要的任务.

3. 无穷级数

一根长度为 1 的杆子,第一天砍下它的一半,第二天又砍下余下的一半,第三天再砍去余下的一半,这样反复地砍下去,不论到了哪一天,总会余下一段长度. 我们的古人早就有这样的观察:"一尺之棰,日取其半,万世不竭."这是很科学的见解. 但是,这样不断地取下去,取下来的总量该是多少呢? 直观地看,这个总量应该是

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots.$$

这里出现的是一个具有无穷多项的"和式".

无独有偶,大约 2400 多年前,古希腊有位哲学家叫做 Zeno,他提出了好几个聪明的悖论向古代数学挑战,一度为古希腊的数学造成了危机. 下面是他的一个悖论,他说:一个赛跑者永远也不能到达他的终点,理由是:赛跑者跑过全程的一半,还余下另一半;当他再跑过这余下的一半的一半时,还会留下其余的一半,即留下全程的 $\frac{1}{4}$;当他继续跑过这余下的 $\frac{1}{4}$ 的一半时,还会留下这 $\frac{1}{4}$ 的一半即 $\frac{1}{8}$;如此等等,以至无穷. 所以说,在他的前面有永远也走不完的路程,也就是说,他永远不能到达终点.

Zeno 的说法同我国古代的"一尺之棰"的问题本质上是一样的. 不过用 Zeno 的形式提出来,就构成了对于常理的一种挑战. 人们根据自己的经验,明知 Zeno 的命题与常理相悖,就应当尽力指出其中的谬误.

在 Zeno 的两千多年之后,由于"无穷级数"的创造,才揭穿了这个悖论的谬误. 17 世纪和 18 世纪的数学家开始认识到,有可能把通常的加法从有限个加项扩展到"无限个加项"组成的集合中来,以使得在某些情况之下,无限多个正数"加起来"仍是一个有限的"和".

设想赛跑者从数轴上的 1 向原点 O 等速地前进,从 1 到 O 就是他要跑过

的全程.设想他从1到$\frac{1}{2}$这一点所需的时间为T,那么从$\frac{1}{2}$到$\frac{1}{4}$这一点所需的时间就是$\frac{T}{2}$,从$\frac{1}{4}$到$\frac{1}{8}$这一点所需的时间就是$\frac{T}{4}$,…,这些时间区间的总长度应是

$$T+\frac{T}{2}+\frac{T}{4}+\cdots+\frac{T}{2^n}+\cdots,$$

这里又再一次出现了由无限多项所组成的"和式".

直观的经验告诉我们,一个跑步者以匀速前进的时候,当他花他用来跑过一半路程所需的时间的两倍的时间,便可到达终点,因此我们期望下面的等式成立:

$$T+\frac{T}{2}+\frac{T}{4}+\cdots+\frac{T}{2^n}+\cdots=2T.$$

我们马上会看到,在某种意义之下,上式是正确的.Zeno悖论的要害是:它把一个有限的时间区间人为地分成了无限个时间区间,而且巧妙地把时间"隐藏"了起来,把时间与空间割裂开来.人们都知道,从起跑开始还不到$2T$的时候,自然没有到达终点,一旦到了$2T$,跑步者便到达了终点.

有很多的例子将导致这一类无限累加的过程.因此,有必要研究形如

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{1}$$

的"和式",这里的每一项都是实数.任何有限项的和,我们都能计算;但对无限项的和,我们如何对它作出定义?合理的做法是先算出它的前n项和:

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\,(n\in\mathbf{N}^*)$$

由此作成的数列S_n,称为(1)的**部分和数列**.再考虑极限$\lim S_n$,如果这个极限是存在的,值为S,那称(1)是**收敛的**,并且把S定义为(1)的和;如果$\lim S_n$不存在,称(1)为**发散的**,这时(1)就谈不上有和.

形如(1)的表达式称为**无穷级数**,它常被简记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.本书第9章和第10章对无穷级数有详细的讨论.这里只作一些最基本的介绍,因为有一点关于无穷级数的知识,对以后叙述将有许多方便.

例1 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q_n=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+\cdots$称为公比为$q$的**等比级数**,也称**几何级数**.§1.4的例2告诉我们,当且仅当$|q|<1$时,这个级数是收敛的,并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}.\quad\square$$

例2 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$是发散的,因为

$$S_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数时},\\ 1, & n\text{ 为奇数时},\end{cases}$$

它是一个发散的数列.

例 3 级数

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

叫做**调和级数**.

§1.6 的例 2 表明,调和级数是发散的. □

例 4 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}.$$

由上例及§1.6 例 3 表明,这个级数当 $\alpha>1$ 时收敛,当 $\alpha\leqslant 1$ 时发散. □

例 5 从§1.6 的讨论中,我们得知无穷级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

是收敛的,其和为 e.

练习题 1.13

1. 求$\sqrt{5}$的近似值.
2. 任意给定 $x_0>0$,建立递推公式
$$x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{a}{x_n^2}\right),n\in\mathbf{N}^*.$$
证明数列$\{x_n\}$收敛于方程 $x^3-a=0$ 的正根.
3. 任意给定 $m\in\mathbf{N}^*$,建立求方程 $x^m-a=0$ 的近似根的递推公式.
4. 求 $y=x^3(0\leqslant x<+\infty)$与横轴和直线 $x=a$ 所围成的面积.
5. 求下列级数的和:
(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$;
(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.
6. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的各项为非负,证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛当且仅当级数的部分和数列$\{S_n\}$有上界.
7. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则其通项的极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.举例说明反之不真.

第 2 章　函数的连续性

世界上的事物都处在不断运动和变化之中.反映这些事物的数量方面,也是在不断变化的.因此就有了变量的概念.粗略地说,某些变量之间的相互制约的关系就是函数.函数是数学分析中最重要的研究对象.

本章的主要内容是:函数的概念、函数的极限和连续函数.

我们从集合间的映射谈起.

§ 2.1　集合的映射

集合是数学的一切分支的基本概念.我们假设读者已经熟悉集合的概念、并和交的运算以及那些最基本的记号.

定义 2.1　设 A,B 是两个集合,如果 f 是一种规律,使得对于 A 中的每一个元素 x,B 中有惟一确定的元素——记为 $f(x)$——与 x 对应,则称 f 是一个由 A 到 B 的**映射**,用

$$f:A\to B$$

来表示.集 A 叫做映射 f 的**定义域**.$f(x)\in B$ 叫做 x 在映射 f 之下的像或 f 在 x 上的**值**.

由此可见,映射是一个相当广泛的概念.

例 1　设 $A=\{甲,乙,丙\}$,$B=\{X,Y,Z\}$.

1° 令 $f(甲)=X$,$f(乙)=Y$,$f(丙)=Z$.这种规律 f,就是一个由 A 到 B 的映射 $f:A\to B$.

2° 若令 $f(甲)=f(乙)=f(丙)=Y$,我们又得到另一个映射

$$f:A\to B.\quad \square$$

例 2　设 $\mathbf{N}^*$ 为正整数的全体,$\mathbf{R}$ 为实数的全体,那么,一个映射 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{R}$ 就对应着一个数列:$f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots$.反之,任意地给定一个数列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots,$$

实质上就是给出了一个由 $\mathbf{N}^*$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射.　$\square$

例 3　让每一个 $x\in[-1,1]$ 对应着 $\sqrt{1-x^2}$,这就给出了一个规律 f,也就是一个映射

$$f:[-1,1]\to\mathbf{R}.$$

这时,$f(x)=\sqrt{1-x^2}$,$x\in[-1,1]$. □

要确定一个映射 f,有两个因素:

1° f 的定义域 A;

2° 规律 f,即对于任何 $x\in A$,像 $f(x)$ 是什么?

设 $E\subset A$,即设 E 为 A 的一子集.令

$$f(E)=\{f(x):x\in E\}.$$

也就是说,$f(E)$ 是在映射 f 之下 E 中元素的像的全体,$f(E)$ 称为 E 的像.显然,如果 $f:A\to B$,那么 $f(E)\subset B$.特别地,定义域 A 的像 $f(A)$ 叫做 f 的**值域**.

例如,对例 1 之 1°,$f(A)=B$;对例 1 之 2°,$f(A)=\{Y\}$.对例 3 来说,$f([-1,1])=[0,1]$.

定义 2.2 设 $f:A\to B$,且 $g:A\to B$.如果对于任何 $x\in A$,均有 $f(x)=g(x)$,我们说映射 f 与 g **相等**,记为 $f=g$.

定义 2.3 设 $f:A\to B$.如果 $f(A)=B$,称 f 是由 A 到 B 上的**满射**.也就是说 B 中的任何元素都是 A 中某一元素在 f 之下的像.

定义 2.4 设 $f:A\to B$.如果 $x,y\in A$,且 $x\neq y$ 时有 $f(x)\neq f(y)$,称 f 为**单射**.

定义 2.5 设 $f:A\to B$ 既是单射又是满射,则称映射 f 是**一对一**的.这时,也说 f 在集 A 与集 B 之间建立一个**一一对应**.

例如,在例 1 之 1°中,f 是一对一的;2°中的 f 不是一对一的;例 3 中的 f 也不是一对一的,因为 $f(1)=f(-1)=0$.

在 f 是由 A 到 B 的一一映射的情况之下,可以定义映射 f 的逆映射 $f^{-1}:B\to A$,其规律是:如果 $y=f(x)$,则 $f^{-1}(y)=x$.例如说,对例 1 的 1°,$f^{-1}(X)=$甲,$f^{-1}(X)=$乙,$f^{-1}(Z)=$丙.

定义 2.6 如果 $f:A\to B$,$F\subset B$.A 的子集

$$f^{-1}(F)=\{x\in A:f(x)\in F\}$$

叫做 F 的**逆像**.

例如,在例 1 之 1°中,$f^{-1}(B)=A$,$f^{-1}(\{X\})=\{$甲$\}$;在例 1 之 2°中,$f^{-1}(\{Y\})=A$,但是,$f^{-1}(\{X\})=f^{-1}(\{Z\})=\varnothing$,这里 $\varnothing$ 表示空集.

定义 2.7 设映射 $f:B\to C$;映射 g 的定义域为 A.当 $x\in A_1=g^{-1}(B)$ 时,定义映射

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)).$$

显然,$f\circ g:A_1\to C$,它被称为映射 f 与 g 的**复合**.

为了说明映射复合的概念,我们看看以下两个例子.

注意，这仍是一个一次函数. □

但是，"复合"运算通常是不可以交换的. 例如，令 $f(x)=2x+1$ 以及 $g(x)=x-1$，那么

$$f\circ g(x)=2(x-1)+1=2x-1,$$
$$g\circ f(x)=(2x+1)-1=2x,$$

可见 $f\circ g\neq g\circ f$.

现在设映射 $f:A\to B$ 是一个一一对应，因此它的逆射 $f^{-1}:B\to A$ 也是一个一一对应，并且

$$f^{-1}\circ f(x)=f^{-1}(f(x))=x$$

对于一切 $x\in A$ 成立. 集 A 到 A 自身的映射 I_A 若使得 $I_A(x)=x$ 对一切 $x\in A$ 成立，这样的映射 I_A 被称为 A 上的**恒等映射**. 显然，恒等映射是惟一存在的，因此我们有 $f^{-1}\circ f=I_A$. 由于对一切 $y\in B$ 有 $f\circ f^{-1}(y)=y$，所以 $f\circ f^{-1}=I_B$. 当 $A=B$ 时，如果 $f:A\to A$ 是一对一的，那么 f^{-1} 存在，并且有

$$f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I_A.$$

练习题 2.1

1. 设 $A=\{a,b,c,d\}$. 求证有惟一映射 $f:A\to A$ 满足下列条件：
   (1) $f(a)=b, f(c)=d$；
   (2) $f\circ f(x)=x$ 对一切 $x\in A$ 成立.
2. 设映射 f 满足 $f\circ f(a)=a$，求 $f^n(a)$.
3. 定义映射 $D:\mathbf{R}\to\{0,1\}$ 如下：
$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$
   (1) 求复合映射 $D\circ D$；
   (2) 求 $D^{-1}(\{0\}), D^{-1}(\{1\}), D^{-1}(\{0,1\})$.
4. 设 A 是由 n 个元素组成的集合. 若映射 $f:A\to A$ 是一单射，称 f 是 A 的一个排列. 证明：
   (1) $f(A)=A$；
   (2) f^{-1} 存在；
   (3) A 共有多少排列？
5. 设 A 是由 n 个元素组成的集合. 若映射 f 适合 $f(a)=a$ 对一切 $a\in A$ 成立，称 f 为 A 的恒等排列. 求证：当 $n\geqslant 2$ 时，存在非恒等排列 f 使 $f\circ f$ 为恒等排列.

§2.2 集合的势

设 A 与 B 是两个集合，如果存在一个由 A 到 B 上的一对一的映射，我们就称集 A 与集 B 有"相同的势"，或者说 A 与 B **等价**，用 $A \sim B$ 来表示. 这就在某些集之间建立了一种关系. 很明白，刚才定义的关系具有下列性质：

自反性：$A \sim A$；

对称性：若 $A \sim B$，则 $B \sim A$；

传递性：若 $A \sim B$ 且 $B \sim C$，则 $A \sim C$.

我们给出如下的定义：

定义 2.8 令 $\mathbf{N}^*$ 是正整数的全体，且

$$N_n = \{1, 2, \cdots, n\}.$$

1° 如果存在一个正整数 n，使得集 $A \sim N_n$，那么 A 叫做**有限集**. 空集也被认为是有限集.

2° 如果集 A 不是有限集，称 A 为**无限集**.

3° 若 $A \sim \mathbf{N}^*$，则称 A 为**可数集**.

4° 若 A 既不是有限集，也不是可数集，则叫做**不可数集**.

5° 若 A 是有限集或者 A 是可数集，则称 A 是**至多可数的**.

对于两个有限集 A 与 B，显然，A 与 B 有相等的势的充分必要条件是它们的元素个数相同. 但是，对于无限集而言，"元素的个数相同"这样的话就变得十分含混，而一一对应的概念是明确的、毫不含糊的. 在有限集之间，利用一一对应可以完全决定出元素个数的多寡. 设想在一个大礼堂中，恰有 2000 个座位，在一次演出中所有座位都有观众坐着，并且还有人站着，我们立刻知道到场的观众多于 2000；如果不但没有人站着而且还有位子空着，便知道到场的人数不足 2000. 只有当既没有空着的位子又没有站着的人的时候，观众的人数正好是 2000. 由此可见，集合的势是有限集中"元素的个数"这一概念的推广，并且"势"是一切互相等价的集合中惟一共有的属性.

例 1 设 A 是整数的全体，我们来证明 A 是可数集. 这只需将 A 排列为

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots,$$

直觉告诉我们，这样的排列方法可以把全部整数无遗漏又无重复地排出来. 对于这个例子，我们甚至可以明确地写出从 $\mathbf{N}^*$ 到 A 的一个一一映射：

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时；} \\ -\dfrac{n-1}{2}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时.} \end{cases} \quad \square$$

例 2 证明$(0,1)$与$[0,1]$有相同的势.

证明 我们作出以下的由$[0,1]$到$(0,1)$上的映射:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \text{当 } x=0 \text{ 时};\\ \dfrac{1}{n+2}, & \text{当 } x=\dfrac{1}{n},n\in\mathbf{N}^* \text{ 时};\\ x, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 且不是正整数的倒数时}.\end{cases}$$

不难验证 f 是一对一的. □

从以上的两个例子看出,这两个无限集都与它们的某个真子集有相同的势.这种现象在有限集的情形是决不会发生的.

定理 2.1 一个可数集 A 的每一个无限子集是可数集.

证明 设 $E\subset A$ 并且 E 是无限集.集 A 是可数的,因此可以将 A 排列成

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

按照如下方式构造数列$\{k_n\}$:令 k_1 是最小的正整数使得 $a_{k_1}\in E$.当 $k_1,\cdots,k_{s-1}$ $(s\geqslant 2)$选定之后,令 k_s 是大于k_{s-1}的最小正整数使得 $a_{k_s}\in E$.这样,便得到了一个映射 $f:E\to\mathbf{N}^*$.具体地说,

$$f(a_{k_n})=n,n\in\mathbf{N}^*.$$

这就证明了所需的结论. □

粗略地说,这个定理表明,可数集代表着"最小的"无限势,因为没有不可数的集能作为一个可数集的子集.

定理 2.2 设$\{E_n\}$,$n=1,2,3,\cdots$,是一列至多可数集,令

$$S=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,$$

那么 S 是至多可数集.

证明 设对于 $n\in\mathbf{N}^*$,

$$E_n=\{x_{n1},x_{n2},\cdots,x_{nk},\cdots\},$$

考虑如下的无穷阵列:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_{11}, & & x_{12}, & & x_{13}, & & x_{14}, & & \cdots\\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
x_{21}, & & x_{22}, & & x_{23}, & & x_{24}, & & \cdots\\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
x_{31}, & & x_{32}, & & x_{33}, & & x_{34}, & & \cdots\\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
x_{41}, & & x_{42}, & & x_{43}, & & x_{44}, & & \cdots\\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

其中的第 n 行由 E_n 的元素组成.这个阵列包含着 S 中的所有元素.按照箭头所指示的那样,这些元素可以排成一行:

$$x_{11};x_{21},x_{12};x_{31},x_{22},x_{13};x_{41},x_{32},x_{23},x_{14};\cdots$$

当两个集合 E_i 与 E_j 有公共的元素时,这些元素在这一行中会重复地出现.我们顺着从左到右的方向顺次地看下去,对那些有重复的元素只保留第一次遇见的那一个,剔除其他相同的元素.这样做过之后,仍然得到并集 S.由此可知,S 是至多可数的. □

定理 2.3 $\mathbf{R}$ 中的全体有理数是可数的.

证明 我们先证明[0,1)中全体有理数是可数的.显然,下面的排列:

$$\begin{array}{l}
0,\\
\frac{1}{2},\\
\frac{1}{3},\frac{2}{3}\\
\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\\
\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\\
\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6},\\
\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots
\end{array}$$

穷尽了[0,1)中的所有有理数.我们把这些数重新排列,从第一行开始,接着第二行,然后第三行,…….在同一行中,将数从左到右地排列:

$$0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\cdots$$

然后剔除重复的数,得到的可数集就是[0,1)中的有理数的全体.

很明显,当有理数 $r\in[0,1)$时,对任何整数 n,映射 $r\to r+n$ 是[0,1)中的有理数同$[n,n+1)$中的有理数之间的一个一一对应,因此$[n,n+1)$中的全体有理数也是可数的,这样,$\mathbf{R}$ 中的全体有理数可以表为

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}\{x\in[n,n+1):x\ 是有理数\},$$

上式是可数个互不相交的可数集的并集,依定理 2.2,它是可数的. □

下面我们来指明一个并不那么显然的事实:并不是每一个无限集都是可数的.具体地说,我们来证明:

定理 2.4 [0,1]上的全体实数是不可数的.

证明 用反证法.

假设有某一种方法把[0,1]之间的全体实数无遗漏地排成了一行

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots.$$

把区间[0,1]三等分.在所分成的三个闭区间中,至少有一个闭区间不含 x_1.如果有两个小区间都不含 x_1,那么为了确定起见,取靠左边的那个小区间并将其记作 I_1;如果仅有一个小区间不含 x_1,那就将这个区间记作 I_1.接着,将 I_1 分成相等的三份,从中总可以确定出一个更小的闭区间,记作 I_2,其中不含 x_2(当然也不含 x_1).如此继续下去,得到一个闭区间套 $I_0=[0,1]\supset I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$,其中 I_n 不含 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$.由于 $|I_n|=\dfrac{1}{3^n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$,根据闭区间套定理,有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n=\{x^*\},$$

这个 $x^*\in[0,1]$.因为 x^* 属于一切 I_n $(n=1,2,3,\cdots)$,所以 x^* 不能等于 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 中的任何一个.这说明上述排列并未穷尽[0,1]上的所有实数,由此得出矛盾.这表明我们的假设不能成立,这就证明了[0,1]上的全体实数是不可数的. □

对集合的势的研究,是一门很大的学问,不属于我们这门课程的内容.在这里,我们只定义了可数集,陈述了可数集的几个简单的性质,并且证明了不可数的无限集的存在,特别是指出了一个长度不为0的区间上全体实数所成的集是不可数的.这将为今后的叙述带来方便.

练习题 2.2

1. 平面直角坐标系中,两坐标 x, y 均为有理数的点 (x,y) 称为**有理点**.试证平面上全体有理点所成的集是一可数集.
2. 如果复数 x 满足多项式方程
$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$
其中 $a_0\neq 0, a_1, \cdots, a_n$ 都是整数,那么 x 称为**代数数**.试证代数数全体是可数集.
3. 设 A 是数轴上长度不为零的、互不相交的区间所成的集(注意:集 A 的元素是区间),试证 A 至多是可数的.
4. 设 $S=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$:其中 $x_i=0$ 或 $1, i=1,2,\cdots\}$,求证 S 与区间[0,1]有相等的势.
5. 按下列步骤证明 $\mathbf{R}$ 是不可数的.

(1) 若 $\mathbf{R}$ 可数,则[0,1)上的实数也可数.将[0,1)排成 $[0,1)=\{x_1, x_2, \cdots,$

$x_n,\cdots\}$. 把 $x_1,x_2,x_3,\cdots$ 写成2进制小数的形式：

$$x_1=0.x_{11}x_{12}x_{13}\cdots,$$
$$x_2=0.x_{21}x_{22}x_{23}\cdots,$$
$$x_3=0.x_{31}x_{32}x_{33}\cdots,$$
$$\cdots\cdots$$

(2) 令

$$a_k=\begin{cases}0, & \text{当 } x_{kk}=1 \text{ 时;}\\ 1, & \text{当 } x_{kk}=0 \text{ 时.}\end{cases}\ (k\geqslant 1)$$

考察 $x=0.a_1a_2a_3\cdots$. 然后证明 $x\in[0,1)$ 并且 $x\neq x_k$ 对一切自然数 k 成立.

6. 证明：可数条直线绝不可能覆盖住全平面.

§2.3　函　数

函数是一类特殊的映射. 如果映射 $f:X\to Y$，其中 X 与 Y 都由实数组成，则 f 被称为一个**函数**. 简而言之，函数是由实数到实数的映射. 说得更加精确一些，f 是单变量函数.

函数是我们这门课程中最基本、最主要的研究对象.

在§2.1中所有关于映射下的定义和证明过的那些性质，对函数全都适用.

函数有其定义域. 函数是一个规律，依靠这个规律对定义域中的任何实数，有一个确定的实数与之对应. 函数也有两个要素，第一是定义域，第二是对应规律.

例1　有10种产品，分别编号成 $1,2,\cdots,10$. 下面的表代表每一种产品的价格，例如说是每1千克的价格：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}

这里没有什么"公式"，但它完全符合函数的定义，所以它是一个函数. 这个函数的定义域是 $X=\{1,2,3,\cdots,9,10\}$. 这是一个由表格表示的函数，用列表的方式来定义函数的做法，在日常生活中是经常遇到的. □

例2　设

$$f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

这里 f 显然是一个函数，不过它的定义域没有被明显地写出来. 在这种情况下，

我们应当这样来理解：定义域就是一切使得上式右边的表达式有意义的自变量 x 的全体.

有了这种共识，我们可以来确定这个函数的定义域. 当且只当

$$x\neq 1 \text{ 并且} \frac{1+x}{1-x}\geqslant 0$$

时，右边的表达式才有意义. 当 $x\neq 1$ 时，最后那个不等式等价于

$$1-x^2-(1-x)(1+x)=(1-x)^2\frac{1+x}{1-x}\geqslant 0,$$

由此可见函数 f 的定义域是 $[-1,1)$. □

例 3　图 2－1 表示的是某月某日正午 12 时到下午 6 时气温随时间变化的情况，它是 tOT 平面上的一段曲线，其中 t 表示时间，T 表示气温. 在这里，也看不到什么"公式". 但是，如果我们想知道在从正午 12 时到下午 6 时这一段时间内任何一个时刻的温度，借助于一条有刻度的直尺，就可以从这个图上"读"出来. 至于读得是否准确，那是技术上的困难，不是理论上的问题. 用函数的定义来检验，由图 2－1 所表示的确是一个货真价实的函数，它的定义域是 $[12,18]$.

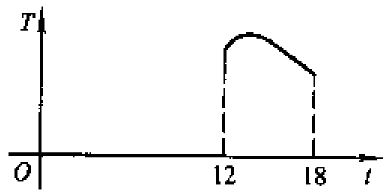

图 2-1

这里所涉及的是一个由图形来表示的函数. 大家很容易地就能感受到它的优点：函数的动态非常清晰生动地展示在我们的面前. 由图 2－1 可以看出：下午两点钟的时候，温度差不多是最高的；从正午到下午两点之间气温不断地升高；下午两点以后气温基本上呈下降的趋势，但中间也有若干反复. □

例 4　从甲地到乙地，行李收费如下：行李重不超过 50 千克时，每千克收费 0.50 元；超过 50 千克时，超重部分每千克加收 0.25 元. 用 x 表示行李的重量，$f(x)$ 记其运费，这时有

$$f(x)=\begin{cases}0.50x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 50 \text{ 时};\\ 0.50\times 50+0.75(x-50), & \text{当 } x>50 \text{ 时}.\end{cases}$$

显然 f 是一个函数，它的定义域是非负实数全体. 容易被初学者误解的是：以为上面的 f 是"两个"函数，因为 f 被两个"公式"表示. 正确的理解是：这两个公式联合起来表示出一个函数 f. 这种函数叫做分段表示的函数. 为了计算 $f(x)$，首先要看自变量 x 属于哪一个范围，然后用相应的那个公式来计算，切勿张冠李戴. □

因为函数的定义域与值域都由实数组成，而对实数可以进行四则运算，因此，比起对一般的映射的研究，对函数的研究将变得更加具体，内容更加丰富.

设 f 与 g 是两个函数，定义域分别是 A 与 B，那么在 $A\cap B$ 上，由

$$f(x)+g(x), x\in A\cap B$$

产生一个函数,这个函数记为 $f+g$,称作 f 与 g 的**和**.在计算函数值的时候应注意

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), x\in A\cap B.$$

类似地,可以定义 f 与 g 的**差、积与商**:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x),$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},$$

在最后一式中,还应当要求 g 在 $A\cap B$ 上不取零值.

特别地,当 c 为一常数时,$(cf)(x)=cf(x)$,其中 $x\in A$.

例 5 设

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,1];$$
$$g(x)=\ln x, x>0,$$

因此 $f\pm g$ 与 fg 的定义域为$(0,1]$.但是,$\dfrac{f}{g}$的定义域是开区间$(0,1)$. □

设函数 f 在 X 与 Y 之间建立了一个一一对应,那么依 §2.1,有逆映射 $f^{-1}:Y\to X$,这时我们称 f^{-1}为 f 的**反函数**.函数 f 与 f^{-1}之间的联系是,如果

$$y=f(x), x\in X,$$

那么

$$x=f^{-1}(y), y\in Y.$$

反之也是如此.由以上两式,推知

$$f\circ f^{-1}(y)=f(x)=y, y\in Y,$$
$$f^{-1}\circ f(x)=f^{-1}(y)=x, x\in X.$$

这表明 $f\circ f^{-1}$是 Y 中的恒等映射,$f^{-1}\circ f$ 是 X 中的恒等映射.

人们十分关心的是:一个函数什么时候一定有反函数?一个既简单又重要的事实由下列定理 2.5 所揭示.不过,首先需要

定义 2.9 函数 $f:X\to Y$ 叫做 X 上的**递增(递减)函数**,是指对任何 $x_1,x_2\in X$,只要 $x_1<x_2$,便有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ ($f(x_1)\geqslant f(x_2)$).函数 f 叫做**严格递增(严格递减)的函数**,是指对任何 $x_1,x_2\in X$ 只要 $x_1<x_2$,便有 $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$).

在 X 上(严格)递增或(严格)递减的函数,统称**(严格)单调的函数**.

例如,取常值的函数是递增函数同时也是递减函数.但不是严格单调的函数.正弦函数在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上是严格递增的,在$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$上是严格递减的函数.函

数 $f(x)=3x-100$ 在全实轴上是严格递增的函数.

定理 2.5 设函数 f 在其定义域 X 上是严格递增(严格递减)的,那么反函数 f^{-1} 必存在,f^{-1} 的定义域为 $f(X)$,并且 f^{-1} 在这一集合上也是严格递增(严格递减)的.

证明 令 $Y=f(X)$. 由于 f 的严格单调性,由 $f(x_1)=f(x_2)$,其中 $x_1,x_2\in X$,只能推出 $x_1=x_2$. 这表明 $f: X\to Y$ 是一个一一对应,因此反函数 f^{-1} 存在.

现在设 f 是严格递增的,我们来证 f^{-1} 也是严格递增的. 用反证法,如果 f^{-1} 在 Y 上不是严格递增的,则存在 $y_1,y_2\in Y$,且 $y_1<y_2$,但是 $f^{-1}(y_1)\geqslant f^{-1}(y_2)$,由于 f 是严格递增的,便有

$$f(f^{-1}(y_1))\geqslant f(f^{-1}(y_2)),$$

这也就是 $y_1\geqslant y_2$,与 $y_1<y_2$ 矛盾. 这就证明了 f^{-1} 一定也是严格递增的. □

在结束本节的时候,我们来研究在已知函数 f 的图像的情况下,如何简便地得出其反函数 f^{-1} 的图像.

一般地说,函数 $f: X\to Y$ 的图像是指平面点集

$$G(f)=\{(x,f(x)): x\in X\},$$

它通常是一条平面曲线. 当函数 f 有反函数 f^{-1} 的时候,同一条曲线 $G(f)$ 本质上也可以看成是 f^{-1} 的图像,只不过是需要把纵轴上的点集当作 f^{-1} 的定义域,并不需要把图像重画一遍. 但是,人们往往习惯于把定义域画在横轴上,这就提出了重新作图的问题. 按照人们的习惯,应当有

$$\begin{aligned} G(f^{-1}) &= \{y,f^{-1}(y): y\in Y\} \\ &= \{(f(x),x): x\in X\}, \end{aligned}$$

注意到 (a,b) 与 (b,a) 是关于直线 $y=x$ 镜像对称的两点,我们便知道 $G(f)$ 与 $G(f^{-1})$ 互相关于坐标系第一、第三象限的分角线镜像对称. 利用这一观察,便使我们很容易地由 $G(f)$ 得出 $G(f^{-1})$,见图 2-2.

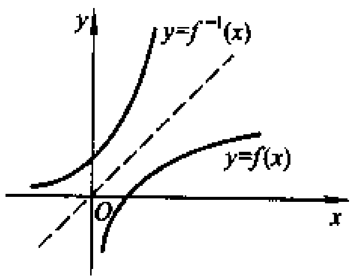

图 2-2

练习题 2.3

1. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$；　(2) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$；

(3) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x-2}$；　(4) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+\sin x}{1-\cos x}\right)$.

2. 给定函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，如果 $x\in\mathbf{R}$ 使 $f(x)=x$，称 x 为 f 的一个**不动点**. 若 $f\circ f$ 有惟一的不动点，求证 f 也有惟一的不动点.

3. 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. 若 $f\circ f$ 有且仅有两个不动点 $a,b(a\neq b)$，求证只有以下两种情况：

(1) a,b 都是 f 的不动点；

(2) $f(a)=b,f(b)=a$.

4. 函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，且每一实数都是 $f\circ f$ 的不动点，试问

(1) 有几个这样的函数？

(2) 若 f 在 $\mathbf{R}$ 上递增，有几个这样的函数？

5. 求函数 f 的 n 次复合：

(1) 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 f^n；

(2) 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+bx}$，求 f^n.

6. 设 $f(x)=3x+2$，试证存在 $m\in\mathbf{N}^*$，使得 $f^{100}(m)$ 可被 1988 整除.

7. 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$l$ 为一正数，如果 $f(x+l)=f(x)$ 对一切 x 成立，则称 f 是周期为 l 的**周期函数**.

如果 f 以任何正数为周期，求证 f 为常值函数.

8. 试证：$\sin x^2$，$\sin x+\cos\sqrt{2}x$ 均不是周期函数.

9. 函数 $f:(-a,a)\to\mathbf{R}$. 如果对任何 $x\in(-a,a)$ 有 $f(x)=f(-x)$，则称 f 为一**偶函数**；若 $f(x)=-f(-x)$，则称 f 为一**奇函数**.

求证：$(-a,a)$ 上的任何函数均可表为一个奇函数和一个偶函数之和.

10. 函数

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

分别称为**双曲余弦**和**双曲正弦**. 证明：

(1) $\operatorname{ch} x$ 是偶函数，$\operatorname{sh} x$ 是奇函数；

(2) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, x \in \mathbf{R}$.

11. 求双曲正弦 $y = \operatorname{sh} x$ 的反函数.

问题 2.3

1. 设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 满足方程

$$f(x+y) = f(x) + f(y), x, y \in \mathbf{R}.$$

试证:对一切有理数 x,有 $f(x) = xf(1)$.

2. 设 $f(x+T) = kf(x)$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 成立,其中 T 和 k 是两个正数.证明 $f(x) = a^x\varphi(x)$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 成立,其中 a 为常数,φ 是周期为 T 的函数.

3. 设 $a < b$,证明:

(1) 若 f 的图像关于直线 $x = a$ 对称,也关于直线 $x = b$ 对称,则 f 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

(2) 若 f 的图像关于直线 $x = a$ 对称,也关于点 (b, y_0) 中心对称,则 f 是以 $4(b-a)$ 为周期的周期函数.

(3) 若 f 的图像关于点 (a, y_0) 中心对称,也关于点 (b, y_1) 中心对称,则 $f(x) = \varphi(x) + cx, x \in \mathbf{R}$,其中 φ 是一周期函数,c 是常数.特别,当 $y_0 = y_1$ 时 $c = 0$.

§2.4 函数的极限

可以举出很多实际的例子,来说明有必要研究当自变量 x 无限趋近于一点 x_0 时函数值 $f(x)$ 的变化趋势;其中又有许多场合表明,当自变量 x 无限趋近于 x_0 时,对应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于一个固定的实数,这就是函数极限的一个很粗糙的说法.为了作出深入的研究,我们必须有一个精确的定义.

定义 2.10 设函数 f 在点 x_0 的近旁有定义,但 x_0 这一点自身可以是例外.设 l 是一个实数.如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在一个 $\delta > 0$,使得对一切适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的 x,均有

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

则称当 x 趋于点 x_0 时函数 f 有**极限** l,记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

或者更简单一些,记作

$$f(x)\to l\,(\text{当 } x\to x_0 \text{ 时}).$$

这时,也可以说函数 f 在点 x_0 **有极限** l.

在给出了这一定义之后,我们作出如下的注记.首先,在讨论 f 在点 x_0 的极限时,f 在 x_0 是否有定义并不重要,因为不等式 $0<|x-x_0|$ 已经把 $x=x_0$ 的可能性排除在外;在一般情形之下,δ 与 ε 有关系,为了强调这种依赖关系,有时把 δ 写为 $\delta(\varepsilon)$,但这不意味着 δ 是 ε 的函数;f 在 x_0 是否有极限、有极限时极限值等于怎样的数,只决定于 f 在 x_0 的充分小的近旁的状态,而与 f 在远处的值无关.

让我们来看若干例子.

例 1 证明 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

证明 函数 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 除 $x=0$ 之外,在其他各处均有定义.对任意给定 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$ 凡是 $0<|x-0|=|x|<\delta$ 时,便有

$$\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|=\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|<\delta=\varepsilon.$$

这就证明了所需的结论. □

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-4x+4)$.

解 虽然,函数 x^2-4x+4 在 $x=3$ 时有定义,但这一事实与当前所讨论的问题无关.我们将这个二次三项式写成 $(x-3)$ 的多项式,得到

$$x^2-4x+4=(x-3)^2+2(x-3)+1.$$

对任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$,凡是 $0<|x-3|<\delta$ 时,都有

$$\begin{aligned}|(x^2-4x+4)-1|&\leqslant|x-3|(|x-3|+2)\\&<|x-3|(1+2)=3|x-3|<3\delta\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了欲求的极限是 1. □

以上这个例子虽然是一个很简单、很特殊的问题,但是其解法中所使用的方法对于计算多项式的极限有普遍的意义.

例 3 求极限

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x}.$$

解 这时所讨论的函数在 $x=1$ 没有定义.由于 $x\neq 1$,所以可以同时消去分子与分母中的公因式 $x-1$,而得出

$$\frac{x^2-1}{x^2-x}=\frac{x+1}{x}.$$

由此我们觉察到当 $x\to1$ 时,函数的极限为 2. 为了证明这一观察,对于任意给定的小于 1 的正数 ε,取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$,凡 $0<|x-1|<\delta$ 时,我们有

$$|x|=|x-1+1|\geqslant1-|x-1|\geqslant1-\delta=1-\frac{\varepsilon}{2}>\frac{1}{2},$$

由此得出

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2-x}-2\right|=\frac{|x-1|}{|x|}<2|x-1|<2\delta=\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-x}=2.\quad\square$$

对于初学者来说,依据函数极限的定义,利用"ε-δ 语言"来证明极限或计算极限,多做一些这样的练习是十分必要的. 学习中,熟练地、巧妙地运用"ε-δ 语言",常常是一个难点. 只有多做多练,才能逐渐地克服这一困难. 但是,这并不是说每一个极限的证明和计算,都得使用这种"精确语言",那样做未免失之繁琐. 掌握极限运算的一些性质,将使极限计算大为简化.

首先从极限的四则运算性质谈起.

定理 2.6 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 存在,那么有

1° $\lim\limits_{x\to x_0}(f\pm g)(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$;

2° $\lim\limits_{x\to x_0}fg(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$;

3° $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f}{g}(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq0$.

证明 由于 1° 与 2° 的证明比较容易,我们只证 3°.

令 $l=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 及 $m=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$. 由已知条件,$|m|>0$. 对任意给定的小于 $\frac{|m|}{2}$ 的正数 ε,必存在 $\delta_1>0$,凡是 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时便有

$$|f(x)-l|<\varepsilon,\tag{1}$$

也必存在 $\delta_2>0$,使得凡是 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时有

$$|g(x)-m|<\varepsilon.\tag{2}$$

在条件(2)下,我们有

$$|m|-|g(x)|\leqslant|g(x)-m|<\varepsilon<\frac{|m|}{2},$$

从而推出当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时

$$|g(x)|>\frac{|m|}{2}. \tag{3}$$

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，因此凡是 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，(1)，(2)和(3)同时成立，由此得到

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{l}{m}\right| &= \frac{|f(x)m-g(x)l|}{|m||g(x)|}\\ &\leqslant \frac{1}{|m||g(x)|}(|m||f(x)-l|+|l||m-g(x)|)\\ &\leqslant \frac{2}{m^2}(|m|\varepsilon+|l|\varepsilon)=\frac{2(|l|+|m|)}{m^2}\varepsilon.\end{aligned}$$

在最后的那个表达式中，ε 前头的系数并不等于1.但这系数是一个确定的常数，既然 ε 可以取得任意地小，一个确定的常数与 ε 的乘积也可以成为任意地小.有了这种认识，就知道我们已经证明了 3°.今后的许多情形我们也将照此办理，并不煞费苦心地去把最后的表达式中 ε 的系数凑成1. □

函数极限也有类似于数列极限那样的"夹逼定理"，这样的定理也提供了计算极限的有效方法.

定理 2.7(夹逼原理)　设函数 f,g 与 h 在点 x_0 的近旁(点 x_0 自身可能是例外)满足不等式

$$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x).$$

如果 f 与 g 在点 x_0 有相同的极限 l，那么函数 h 在点 x_0 也有极限 l.

证明　由于 $f(x)\to l(x\to x_0)$，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$，使得凡 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时有

$$l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon;$$

类似地，存在 δ_2，使得凡 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时有

$$l-\varepsilon<g(x)<l+\varepsilon.$$

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，我们可得

$$l-\varepsilon<f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)<l+\varepsilon,$$

由此推出当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $|h(x)-l|<\varepsilon$ 成立，这便证明了 $h(x)\to l(x\to x_0)$. □

将一个比较复杂的函数看成若干个较简单的函数的复合，常有助于计算极限.这时，需要下列定理.

定理 2.8　设函数 f 在 x_0 处有极限 l，而函数 g 在 t_0 处有极限 x_0，并且，在 t_0 的一个充分小的近旁，$g(t)\neq x_0$，那么复合函数 $f\circ g$ 在 t_0 处有极限 l.

证明　由于 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个 $\sigma>0$，使得凡是

$0<|x-x_0|<\sigma$ 便有

$$|f(x)-l|<\varepsilon.$$

对于这一个已由 ε 给定之后而决定了的 $\sigma>0$，因 $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=x_0$，存在 $\delta>0$，使得凡是 $0<|t-t_0|<\delta$ 便有

$$0<|g(t)-x_0|<\sigma.$$

这样一来，便知：当 $0<|t-t_0|<\delta$ 时，我们有

$$|f\circ g(t)-l|=|f(g(t))-l|<\varepsilon.$$

这正是 $\lim\limits_{t\to t_0} f\circ g(t)=l$. □

函数的极限与数列的极限有着密切的关系.熟悉了这一关系，对我们将会有很大的好处.这是因为，数列的极限在第一章中已被详尽地研究过.

定理 2.9 函数 f 在 x_0 处有极限 l 的必要充分条件是：对于任何一个收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\neq x_0: n=1,2,3,\cdots\}$，数列 $\{f(x_n)\}$ 有极限 l.

证明

1° 必要性

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使得凡是 $0<|x-x_0|<\delta$ 时便有 $|f(x)-l|<\varepsilon$.对于已取定的 $\delta>0$，只要 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，便存在一个 $N\in\mathbf{N}^*$，使得凡是 $n>N$ 时便有 $0<|x_n-x_0|<\delta$.这样，当 $n>N$ 时，我们有

$$|f(x_n)-l|<\varepsilon.$$

这正是 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l$.

2° 充分性

假设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ 不成立，那么，必有一个正数 ε_0，对于每一个正整数 n，一定有一点 x_n，满足 $0<|x_n-x_0|<\dfrac{1}{n}$，且使得 $|f(x_n)-l|\geqslant\varepsilon_0>0$.这就是说，我们已经找到了一个数列 $\{x_n\neq x_0; n\in\mathbf{N}^*\}$，虽然它收敛于 x_0，但是 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq l$.

这样便完全证明了定理. □

有了定理 2.9，证明定理 2.6 的 3° 就很简单了.设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=m\neq0$，那么对任意收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$ 便有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l$，$\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=l\neq0$，于是由数列中已知的结果有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}=\dfrac{l}{m}$，由于 $\{x_n\}$ 是任意趋于 x_0 的数列，由定理 2.9 即知

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l}{m}.$$

再看两个应用定理 2.9 的例子

例 4　求证 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

证明　命

$$x_n=\frac{1}{(2n+1/2)\pi}\to 0,\quad x'_n=\frac{1}{2n\pi}\to 0,\ n\to\infty.$$

令 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$. 我们有 $f(x_n)=1\to 1, f(x'_n)=0\to 0\ (n\to\infty)$. 由定理 2.9，知该极限不存在. □

例 5　定义函数 $D:R\to\{0,1\}$ 如下：

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数时},\\ 0, & x\text{ 为无理数时}.\end{cases}$$

证明对于任意 $x_0\in\mathbf{R}$，$\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$ 不存在.

证明　对于任意的 $x_0\in\mathbf{R}$，一定存在全由有理数组成的数列 $\{s_n\}$ 和全由无理数组成的数列 $\{t_n\}$，使它们都趋向于 x_0，这样就有

$$\lim_{n\to\infty}D(s_n)=1,$$
$$\lim_{n\to\infty}D(t_n)=0.$$

由定理 2.9，即知 $\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$ 不存在. □

上例中定义的函数 D 叫做 Dirichlet 函数，看上去这个函数有太多的人工雕琢的成分，不很自然，但是用它来澄清一些似是而非的误解时，时常是十分方便的. 例如说，由于例 5，我们知道：处处不存在极限的函数是存在的. 以后还将多次遇到这个函数.

完全可以只利用函数自身的信息而无需凭借其他的实数，来判断函数是否有极限，这就是以下这个重要的定理.

定理 2.10　函数 f 在 x_0 处有极限，必须而且只需对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，凡是两点 x_1, x_2 满足 $0<|x_1-x_0|<\delta$，并且 $0<|x_2-x_0|<\delta$，便有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

证明　1° 必要性

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$，那么，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，凡是 $0<|x-x_0|<\delta$ 便有 $|f(x)-l|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 特别地，当 $0<|x_i-x_0|<\delta\ (i=1,2)$ 时我们有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-l|+|l-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

2° 充分性

设对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,凡是 $0<|x'_i-x_0|<\delta(i=1,2)$ 时便有 $|f(x'_1)-f(x'_2)|<\varepsilon$.

再设 $\{x_n\neq x_0:n\in\mathbf{N}^*\}$ 是任一个收敛于 x_0 的数列.对于刚才已经确定了的 $\delta>0$,可以找到正整数 N,凡是 $m,n>N$,便有 $0<|x_m-x_0|<\delta$ 以及 $0<|x_n-x_0|<\delta$,由此得到

$$|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon.$$

这表明数列 $\{f(x_n)\}$ 是一个基本列,因此是收敛的数列,设其极限是 l_x.设 $\{y_n\neq x_0:n\in\mathbf{N}^*\}$ 是另一个收敛于 x_0 的数列,数列 $\{f(y_n)\}$ 也应有极限,记为 l_y.我们来证明 $l_x=l_y$.事实上,把 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 交错地排列,作成一个新的数列 $\{z_n\}$:

$$x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n,\cdots.$$

显然 $z_n\neq x_0(n\in\mathbf{N}^*)$,可是 $z_n\to x_0(n\to\infty)$.因此数列 $\{f(z_n)\}$ 有极限,记为 l.注意到 $\{f(x_n)\}$ 和 $\{f(y_n)\}$ 都是 $\{f(z_n)\}$ 的子列,所以必须有

$$l_x=l_y=l.$$

援引定理2.9,立知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在. □

定理2.10称为函数极限的 Cauchy **收敛原理**.这是一个非常有用的定理.

下面引进的单边极限的概念,有时也有助于函数极限的计算.在有些场合,人们只需要研究当自变量 x 从点 x_0 的一边——即在大于 x_0 的一边或小于 x_0 的一边——趋向于 x_0 时函数的动态,即在限制条件 $x>x_0$(或 $x<x_0$)下来研究 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.为此,我们给出

定义2.11 设函数 f 在 (x_0,x_0+r)——这里 r 是一个确定的正数——有定义.设 l 是一个给定的实数.如果对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在一个 $\delta\in(0,r)$,使得凡是 $0<x-x_0<\delta$,便有

$$|f(x)-l|<\varepsilon,$$

则称 l 为 f 在 x_0 处的**右极限**,表示成

$$l=\lim_{x\to x_0+}f(x).$$

在右极限存在的情形下,这个右极限值常记为 $f(x_0+)$.也就是说,

$$f(x_0+)=\lim_{x\to x_0+}f(x).$$

类似地,可以定义 f 在 x_0 处的**左极限** $f(x_0-)$.

右极限和左极限统称为**单边极限**.

特别应当注意的是,切勿将左、右极限的记号 $f(x_0-)$,$f(x_0+)$ 误认为是函数 f 在 x_0 处的值.因为 f 完全可能在 x_0 处没有定义,即使在 $f(x_0)$ 有意义的时刻,$f(x_0)$ 与 $f(x_0-)$,$f(x_0+)$ 这两者之间也可能毫无联系.

例如

$$f(x)=\begin{cases} x-5, & 1<x\leqslant 2, \\ 10, & x=1, \\ x+2, & 0\leqslant x<1. \end{cases}$$

这是一个定义在[0,2]上的函数,容易看出,

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1}(x+2)=3,$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1}(x-5)=-4.$$

它们和 $f(1)=10$ 没有关系.

极限与单边极限的关系,体现在下列定理中.

定理 2.11 设函数 f 在 x_0 的近旁(x_0 可能是例外)有定义.那么,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的必要充分条件是

$$f(x_0+)=f(x_0-),$$

这个共同的值也就是函数 f 在 x_0 的极限值.

这一事实至为明显,略去不证. □

例 6 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

证明 令 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.这个函数除了 $x=0$ 之外处处有定义.很明显,对任何 $x\neq 0$,有

$$f(-x)=f(x).$$

这样的函数叫做**偶函数**.显然可见,任何偶函数的图像关于纵轴是对称的.

首先证明 $f(0+)=1$.实际上,考察区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,作出中心在原点、半径为 1 的圆周(称为单位圆)在第一象限那一部分中的图形.设点 C 是过点 A 作横轴的垂线与 OB 的延长线的交点,$x=\angle AOB$ 以弧度计算.由图 2-3 可见$\triangle AOB$ 的面积<扇形 OAB 的面积<$\triangle AOC$ 的面积.

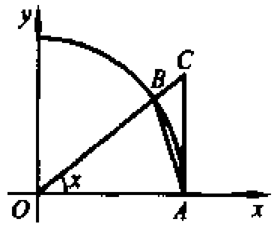

图 2-3

由于 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,上面的面积关系可以推出以下的不等式

$$\sin x<x<\tan x.$$

由此推出

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

更进一步,有

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x.$$

由于

$$0<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<\frac{x^2}{2}<\frac{\pi}{4}x,$$

所以对任给的 $\varepsilon>0$,可取 $\delta=\min\left(\frac{\pi}{2},\frac{4\varepsilon}{\pi}\right)$,凡是 $x\in(0,\delta)$时,便有

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<\frac{\pi}{4}x<\frac{\pi}{4}\delta\leqslant\varepsilon.$$

这就表明了 $f(0+)=1$. 由于 f 是一个偶函数,也有 $f(0-)=1$. 所以,$f(0+)=f(0-)=1$,依定理 2.11,可知

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1. \quad \square$$

例 6 中所指出的极限,是一个十分有用的事实,不可以将它只作为一个普通的例子来对待.

例 7 计算极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

若令 $t=\frac{x}{2}$,那么 $x\to0$ 等价于 $t\to0$,根据例 6,我们有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}&=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\\&=\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}\times1^2=\frac{1}{2}. \quad \square\end{aligned}$$

例 7 中所用的技巧:令 $t=\frac{x}{2}$,称为**变量代换**,又称**换元**,在数学分析的各个部分中都是非常有用的.

我们再叙述并证明函数极限的三条性质.在证明其中的两条性质的时候,没有直接援用函数极限的定义,而是采用了另外一种手法,即利用了定理 2.9(函数极限与数列极限的关系).

定理 2.12(函数极限的惟一性) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则它是惟一的.

证明 任取一收敛于 x_0 的数列$\{x_n\neq x_0:n\in\mathbf{N}^*\}$,由定理 2.9,知

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{x\to x_0}f(x).$$

我们已知数列的极限的惟一性,立知函数极限也是惟一的. □

定理 2.13 若 f 在 x_0 处有极限,那么 f 在 x_0 的一个近旁是有界的.也就是说,存在正数 M 及 δ,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $|f(x)|<M$.

证明 设 f 在 x_0 处的极限等于 l,依定义,存在 $\delta>0$,使得凡是 $0<|x-x_0|<\delta$ 时便有 $|f(x)-l|<1$.由这最后的那个不等式推知

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-l|+|l|<1+|l|$$

对 $0<|x-x_0|<\delta$ 成立.由此可见 $M=1+|l|$ 适合要求. □

定理 2.14 设存在 $r>0$,使得当 $0<|x-x_0|<r$ 时不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 成立,又设在 x_0 处这两个函数都有极限,那么

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\leqslant\lim_{x\to x_0}g(x).$$

证明 取一收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$ 并让它满足

$$0<|x_n-x_0|<r,n\in\mathbf{N}^*.$$

因此我们有

$$f(x_n)\leqslant g(x_n),n=1,2,\cdots.$$

令 $n\to\infty$,得出 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)$.再由定理 2.9,可知这正是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$. □

我们用一个较难的例子作为本节的结尾.

例 8 下面的函数称为 Riemann 函数:

$$R(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q},q>0,p,q\text{ 互素},\\ 0, & x=\text{无理数}.\end{cases}$$

对于任意实数 x_0,证明 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$.

证明 对任意给定的 $\varepsilon>0$,取充分大的正整数 q_0,使得 $\dfrac{1}{q_0}<\varepsilon$.容易知道,在区间 (x_0-1,x_0+1) 中,使得 $0<q\leqslant q_0$ 的分数 $\dfrac{p}{q}$ 只有有限多.因此总能取到充分小的 $\delta>0$,使得 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中的有理数的分母 $q>q_0$.故当无理数 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,则 $R(x)=0$,当有理数 $x=\dfrac{p}{q}$ 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,必有 $q>q_0$.因而

$$0\leqslant R(x)=\frac{1}{q}<\frac{1}{q_0}<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$.

练习题 2.4

1. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言表述 $f(x_0-)=1$.

2. 求证：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在必须而且只须 $f(x_0-)=f(x_0+)$ 为有限数.

3. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$； (2) $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x)=A^2$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}\,(A>0)$； (4) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{A}$.

4. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 2} x^3=8$； (2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}=4$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+2x}=1$；

(5) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}=0$.

5. 设

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 2; \\ -ax, & x<2. \end{cases}$$

(1) 求 $f(2+)$ 与 $f(2-)$；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 存在，a 应取何值？

6. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>a$，求证：当 x 足够靠近 x_0 但 $x\neq x_0$ 时 $f(x)>a$.

7. 设 $f(x_0-)<f(x_0+)$，求证：存在 $\delta>0$ 使得当

$$x\in(x_0-\delta,x_0)\text{ 及 }y\in(x_0,x_0+\delta)$$

时有 $f(x)<f(y)$.

8. 设 f 在 $(-\infty,x_0)$ 内是递增的，并且有一数列 $\{x_n\}$ 适合 $x_n<x_0\,(n=1,2,\cdots)$ $x_n\to x_0$ 且使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A,$$

求证：$f(x_0-)=A$.

9. 用肯定的语气表达“当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 不收敛于 l”.

10. 对任何 $n\in\mathbf{N}^*$，$A_n\subset[0,1]$ 是有限集，且 $A_i\cap A_j=\varnothing\,(i\neq j)$，$i,j\in\mathbf{N}^*$. 定义函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & 若\ x\in A_n;\\ 0, & 若\ x\in[0,1]但不在任何\ A_n\ 中.\end{cases}$$

对任何 $x_0\in[0,1]$，求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

11. 计算极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1+x-x^3}{1+x^2}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x-1}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/m}-1}{x}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^m-m}{x-1}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$;

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+nx)^{1/m}-(1+mx)^{1/n}}{x}$.

以上 $m,n\in\mathbf{N}^*$.

12. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{[x]^2-4}{x^2-4}$,

(3) $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{[x]^2+4}{x^2+4}$,　　(4) $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{[4x]}{1+x}$.

13. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi n!\ \mathrm{e})$ 的值.

14. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$，因而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & t=\dfrac{p}{q}\\ 0, & t=无理数\end{cases}，因而 \lim_{t\to 0}g(t)=0.$$

根据定理 2.8，应有 $\lim\limits_{t\to 0}f(g(t))=1$. 但事实上 $f(g(t))=D(t)$ 是 Dirichlet 函数，根据例 5，它处处没有极限. 发生这个矛盾的原因何在？

§2.5 极限过程的其他形式

在 §2.4 中，详尽地讨论过下列形式的极限：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$，这里 x_0 与 l 都

是确定的实数.在单边极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$中,$x_0$ 也是确定的实数.有很多理由说明,有必要放宽 x_0 或 l 为实数这一限制.例如说,某种放射性物质的质量是时间 t 的函数,随着时间的无限延长,这一物质的质量可以变得"要多小就有多小",这时 t 所接近的就不是一个实数.这就是另外一种形式的极限.

由于 x_0 与 l 的不同状态和各种不同的搭配,将得到许许多多不同形式的极限.我们只讨论其中的两种.事实上,只要对前节那种形式的极限的原理有透彻的了解,就可以举一反三,触类旁通,那种几乎是重复的、使人感到乏味的叙述也就成为多余的了.

定义 2.12 设 l 是一确定的实数,表达式

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=l$$

的意思是:对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在一个正数 A,凡是 x 满足 $|x|>A$ 时便有 $|f(x)-l|<\varepsilon$.这时,我们说"当 x 趋向于无穷时,函数 f 有极限 l".上式也可以简记为

$$f(x)\to l=f(\infty)\ (x\to\infty).$$

至此,我们不难联想如何用"精确语言"来定义

$$f(x)\to l\ (x\to+\infty),$$

$$f(x)\to l\ (x\to-\infty).$$

这里仅对第二个表达式给出:

定义 2.13 对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在一个正数 $A>0$,使得凡是 $x<-A$ 时,便有

$$|f(x)-l|<\varepsilon$$

成立.在这种情况下,我们说"在负无穷处函数 f 有 l 极限",记为

$$f(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=l.$$

第一个表达式的精确定义请读者自行给出.

显然,我们有下列的

定理 2.15 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$ 当且只当

$$f(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=l,$$

$$f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$$

同时成立.

例 1 设

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]},\ x\geqslant 1,$$

这里$[x]$表示不大于 x 的最大整数,试求 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

解　在 § 1.7 中,已经证明数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 递增地趋向于自然对数的底 e. 因此,对于任给 $\varepsilon>0$ 的,存在 $N\in\mathbf{N}^*$,使得

$$0<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{N}\right)^N<\varepsilon.$$

由于 f 是递增的函数,当 $x\geqslant N$ 时我们有 $[x]\geqslant N$,便有

$$0<\mathrm{e}-f(x)\leqslant\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{N}\right)^N<\varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}=\mathrm{e}. \quad \square$$

建议读者用"$\varepsilon-A$ 语言"来证明下列更加容易证明的极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)=1.$$

在 § 2.4 中,我们证明了许多定理(例如,从定理 2.6 到定理 2.10),其中有关于极限的四则运算的定理、夹逼原理等等,它们虽然说是对"$x\to x_0$"这种极限过程来叙述和证明的,但是它们对其他的极限过程显然也是适用的,只是应当在同一类极限过程中加以运用. 至于定理 2.10,即 Cauchy 收敛原理,只需加以明显的改动,也可以成立.

例如,应用极限的四则运算法则,可以得到:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)\\
&=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1}\\
&=\mathrm{e}\cdot\frac{1}{1}=\mathrm{e}.
\end{aligned}$$

下面的例子和 § 2.4 的例 6 一样是另一个重要的极限.

例 2　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$

证明　先设 $x\geqslant 1$,由不等式 $[x]\leqslant x<[x]+1$ 得出

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

我们已经知道:当 $x\to+\infty$ 时,上式左、右两边的函数趋向于极限 e,由夹逼原理

便知

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

现在再来讨论 $x\to-\infty$. 令 $y=-(x+1)$. 易知，当 $x\to-\infty$ 时 $y\to+\infty$，而

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1}=\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(1+\frac{1}{y}\right)$$
$$\to\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}\quad(y\to+\infty),$$

所以

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.\quad\square$$

练习题 2.5

1. 用 $\varepsilon-A$ 语言来证明：

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{3x^2-x+1}=\dfrac{1}{3}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{2x+3}=\dfrac{3}{2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-a})=0$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})=0$.

2. 定出常数 a 和 b，使得下列等式成立：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$;

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$.

3. 证明：

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1})=0.$$

4. 设常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，求证：

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\sin\sqrt{x+k}=0.$$

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

6. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$，其中 $b\neq0$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$;

(5) $\lim\limits_{h\to 0}\sin(x+h)$;　　(6) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{3+x}\right)^{x}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}$;

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$;　　(10) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$.

7. 用极限来定义函数

$$f(x)=\lim_{x\to\infty}n^x\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right),$$

求 f 的定义域,并写出 f 的表达式.

8. 如果 $x\in(-1,1)$ 有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right|\leqslant|\sin x|$,求证

$$\left|\sum_{k=1}^{n}ka_k\right|\leqslant 1.$$

9. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在的充分必要条件是对任意的 $\varepsilon>0$,存在一个正数 A,只要 x_1,x_2 满足 $x_1>A,x_2>A$,便有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

10. 设 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,求证 $f=0$.

问题 2.5

1. 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上满足函数方程 $f(2x)=f(x)(x>0)$,并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且有限,求证:f 为常值函数.

2. 设 a 和 b 是两个大于 1 的常数,函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 在 $x=0$ 的近旁有界,并且对一切 $x\in\mathbf{R}$ 有 $f(ax)=bf(x)$,求证:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0).$$

3. 设 f 和 g 是两个周期函数,满足

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0,$$

证明:$f=g$.

§2.6 无穷小与无穷大

在这一节中,我们首先来介绍另一类型的"极限".之所以在极限二字上加上引号,是因为"极限值"不是一个实数.在这个意义上,它与前面讨论过的极限大不相同.作为一个例子,考察函数 $f(x)=\frac{1}{x}$.除了 $x=0$ 之外,$f(x)$处处都有定义.$y=\frac{1}{x}$的图像是存在于第一象限和第三象限的一条双曲线的两支(图 2-4).很显然,当 $x\to 0$ 时,f 的值可以变得要多大就有多大.为了研究函数的这种行为,我们引进

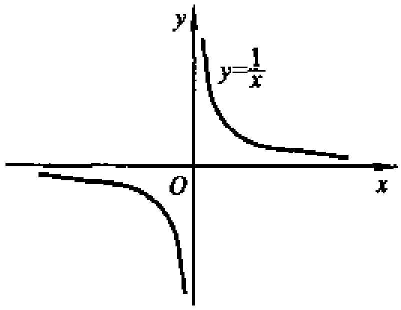

图 2-4

定义 2.14 设 x_0 是一个实数,函数 f 在 x_0 的一个近旁(可能除 x_0 之外)有定义.如果对任意给定的正数 A,存在 $\delta>0$,使得凡是 $0<|x-x_0|<\delta$ 便有 $|f(x)|>A$,则称"当 x 趋向于 x_0 时函数 f 趋向于**无穷大**",记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty,$$

或者

$$f(x)\to\infty(\text{当 } x\to x_0 \text{ 时}).$$

类似地,还可以定义

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty,$$

如此等等.所有这些情形,我们说"在所标明的极限过程中,f 是一个**无穷大(量)**."

与上述情形相对照,如果在某一极限过程中,$\lim f(x)=0$,则说"在该过程中,f 是一个**无穷小(量)**."

显然,无穷大的倒数是无穷小;不取零值的无穷小的倒数是无穷大.

在同一极限过程中,为确定起见,比如说在 $x\to x_0$ 的过程中,f 与 g 都是无穷小,那么我们可以按下面的定义对这两个无穷小进行比较.

定义 2.15 设当 $x\to x_0$ 时 f 与 g 都是无穷小,并且 g 在 x_0 的一个充分小的近旁(除 x_0 之外)不取零值.

1° 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$,那么称 f 是比 g **更高级的无穷小**;

2° 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l\neq 0$,则称 f 与 g **是同级的无穷小**;

3° 如果 2°中的极限值 $l=1$,那么称 f 与 g 是**等价的无穷小**,记为

$$f\sim g(x\to x_0).$$

可以把无穷小的"级"进行"量化".为此,要取一个无穷小作为标准.当 $x\to x_0$ 时,很自然地是取 $(x-x_0)$ 当作"1 级无穷小".设当 $x\to x_0$ 时 f 是一个无穷小,那么当 f 与 $(x-x_0)^\alpha$ $(\alpha>0)$ 为同级的无穷小时,称 f 为 α **级的无穷小**.

例如,由于

$$\sin x\sim x(x\to 0),$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2(x\to 0),$$

可见当 $x\to 0$ 时 $\sin x$ 及 $1-\cos x$ 分别为 1 级与 2 级的无穷小.

在同一极限过程中的两个无穷大,也可以仿此进行比较.具体地说,设在某一极限过程中 f 与 g 都是无穷大,那么

当 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ 时,则说 g 是比 f **更高级的无穷大**.也可以说,f 是比 g **更低级的无穷大**;

当 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$存在且不等于 0 时,称它们是**同级的无穷大**;当这极限值等于 1 时,称 f 与 g 是**等价的无穷大**.

类似地,我们可以定义无穷大的"级"的概念.无需作出一般的定义,只需通过以下的例子来说明这个概念,就足以使人明白.

例如,当 $x\to 1$ 时,最好取$\dfrac{1}{x-1}$作为标准的无穷大.由于

$$\frac{x^2+x-2}{(x^2-1)^3}=\frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)^3}=\left(\frac{1}{x-1}\right)^2\frac{x+2}{(x+1)^3},$$

以及

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{(x+1)^3}=\frac{3}{8}\neq 0,$$

因此$\dfrac{x^2+x-2}{(x^2-1)^3}$是一个 2 级的无穷大. 又如，当 $x\to\infty$ 时取 $|x|$ 为标准的无穷大是十分合理的. 因此，由于

$$\sqrt{2x^2+1}=|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}$$

以及

$$\sqrt{2}<\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}<\sqrt{2}+\frac{1}{|x|},$$

可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{|x|}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{2}\neq 0,$$

从而得出当 $x\to\infty$ 时 $\sqrt{2x^2+1}$ 是 1 级的无穷大.

值得注意的是，不是对每一个无穷小或无穷大都能定出“级”来. 大家知道，当 $x\to 0$ 时，$x\sin\dfrac{1}{x}$ 是一个无穷小. 可是，把 x 取为标准的无穷小时，不可能为无穷小 $x\sin\dfrac{1}{x}$“定级”.

大家知道，当 $x\to+\infty$ 时，下面四个函数

$$\ln x,\quad x^{\alpha}(\alpha>0),\quad e^{x},\quad x^{x}$$

都是无穷大，它们之间的级哪个高，哪个低？我们将在 §3.6 中证明，在上面的顺序中，后一个是比前一个更高级的无穷大. 这样一个认识在讨论许多问题时都要用到.

等价的无穷小（无穷大）的作用，可从下列定理中看出.

定理 2.16 设想在某一确定的过程中需要计算一个表达式的极限，那么，在这表达式中以因式的形式出现的无穷小（或无穷大），可被与之等价的无穷小（或无穷大）所代替，不会影响极限值的计算. 说得更准确一些，不会影响极限的存在性；在极限存在的时候，极限值也不会改变.

证明 设在某一过程中 f 与 g 是等价的无穷小（或无穷大），而我们要计算的是 $\lim f(x)h(x)$. 于是，由于

$$\begin{aligned}\lim f(x)h(x)&=\lim g(x)h(x)\frac{f(x)}{g(x)}\\&=(\lim g(x)h(x))\lim\frac{f(x)}{g(x)}\\&=\lim g(x)h(x),\end{aligned}$$

立知结论成立. □

例如,我们已知

$$\sin x \sim x(x \to 0).$$

当 a 与 $b \neq 0$ 为常数时,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{bx}=\frac{a}{b}.$$

特别应注意的是:这种代替只能发生在以因式形式出现的无穷小(或无穷大)上,而不能发生在以加项或减项出现的无穷小(或无穷大)上.不牢记这一点,将铸成大错.例如,计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}.$$

这时如果错误地将 $\sin x$ 用 x 来代替,得到结果将是0.事实上,在§3.6中将知道,正确的答案应是 $\frac{1}{6}$.

在结束本节的时候,我们介绍两个记号,它们将为今后的表达带来方便.在某些场合,我们并不需要某一个量的十分具体的表达式(有时这种表达式十分复杂),只需知道这个量的动态就已足够,这时,如果把这个量原封不动地写上去,反而增添不必要的麻烦.

定义 2.16　设函数 f 与 g 在 x_0 近旁(x_0 除外)有定义,并且 $g(x)\neq 0$.

1° 当 $x\to x_0$ 时,若比值 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 保持有界,即存在正常数 M,使得 $|f(x)|\leqslant M|g(x)|$ 成立,就用 $f(x)=O(g(x))(x\to x_0)$ 来表示;

2° 当 $x\to x_0$ 时,若 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 是一个无穷小,即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

时,就用 $f(x)=o(g(x))(x\to x_0)$ 来表示.

特别地,记号 $f(x)=O(1)(x\to x_0)$ 与 $f(x)=o(1)(x\to x_0)$ 分别表示在 $x\to x_0$ 的过程中函数 f 有界与 f 是一个无穷小.

例如:

$$3x^2-2x+10=O(x^2),x\to\infty;$$

$$x=O(\sin x),x\to 0;$$

$$x^{3/2}\sin\frac{1}{x}=o(x),x\to 0.$$

我们对符号 O,o 的用法作一点说明.记号 $O(g(x))$ 与 $o(g(x))$ 并不具体地代表一个量,而只是表示量的一种状态,一种类型.式子 $f(x)=O(g(x))$ 或

$f(x)=o(g(x))$中的符号“$=$”应当理解为属于“$\in$”的意思，表示函数 f 属于等式右边所代表的类型，而式子 $O(g(x))=f(x)$或 $o(f(x))=f(x)$都没有明确的意义，所以这里的“等式”两边的东西不能像通常等式那样进行交换. 又如式子

$$O(1)+o(1)=O(1)(x\to x_0)$$

是有意义的，它表示当 $x\to x_0$ 时，一个有界量与无穷小量的和仍是一个有界量；但是我们不能去掉等式左方与右方的 $O(1)$而得出 $o(1)=0$ 这种结论. 又如 $O(1)+O(1)=O(1)$有着明确的意义，即在 $x\to x_0$ 的过程中，两个有界量之和仍是一个有界量，这时我们既不能从等式的双方同时取走一个 $O(1)$，也无需把上式写为 $O(1)+O(1)=2O(1)$.

练习题 2.6

1. 求下列无穷小或无穷大的级：

(1) $x-5x^3+x^{10}(x\to 0)$；　(2) $x-5x^3+x^{10}(x\to\infty)$；

(3) $\dfrac{x+1}{x^4+1}(x\to\infty)$；　(4) $x^3-3x+2(x\to 1)$；

(5) $\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}(x\to+\infty)$；　(6) $\dfrac{1}{\sin \pi x}(x\to 1)$；

(7) $\sqrt{x\sin x}(x\to 0)$；　(8) $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}(x\to 0)$；

(9) $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}(x\to\infty)$；　(10) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}(x\to 0)$；

(11) $\sin\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}-\sqrt{2}\right)(x\to 0+)$；

(12) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}(x\to 0)$；

(13) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}(x\to\infty)$；

(14) $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)\quad(x\to+\infty)$.

2. 当 $x\to x_0$ 时 $\alpha=o(1)$，求证：

(1) $o(\alpha)+o(\alpha)=o(\alpha)$；　(2) $o(c\alpha)=o(\alpha)$，c 为常数；

(3) $(o(\alpha))^k=o(\alpha^k)$；　(4) $\dfrac{1}{1+\alpha}=1-\alpha+o(\alpha)$.

3. 用等价无穷小替换，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan^4 x}{\sin^3 x(1-\cos x)}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}-1}{1-\cos^2 x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)}{\sin x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x+x^2)^{1/n}-1}{\sin 2x}, n\in \mathbf{N}^*$.

问题 2.6

1. 设$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ 且 $f(x)-f\left(\dfrac{x}{2}\right)=o(x)(x\to 0)$，求证：
$$f(x)=o(x)(x\to 0).$$
2. 函数列 $f_n:(0,+\infty)\to\mathbf{R}, n=1,2,3,\cdots$，对任何 $n\in\mathbf{N}^*$，f_n 都是无穷大($x\to+\infty$). 试证：存在$(0,+\infty)$上的一个函数 f，当 $x\to+\infty$ 时 f 是比 f_n 更高级的无穷大，$n\in\mathbf{N}^*$.

§2.7　连续函数

函数定义中，所包容的对象相当一般，如果不从中加以选择来进行研究，那就很难得出多少有用的结论. 一类十分重要并且在自然界经常出现的函数，我们称之为连续函数的，将成为主要的研究对象.

大家知道，气温是时间的函数. 这种函数具备下面所指出的那些特征. 设想在 1997 年夏季的一天，在我国某地正午的气温正好是 42℃，而午夜的气温却只有 8℃. 尽管在这一天之中温差相当大，但直觉和经验都告诉我们，在正午前后的一段很小的时间区间之内，气温的变化不会太大，与 42℃ 相差不会很远；并且，这种温差要多小就可以有多小，只要我们把时间限制在 12 时前后的一段合适的区间之内. 除了这一特征之外，这种函数还有另一条性质，那就是，一定存在那么一个时刻，在这个时刻气温会等于当天的最低气温和最高气温之间任意一个指定的气温.

为了正确地描述和深入研究这类函数，给出如下的定义：

定义 2.17　设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$. 我们称函数 f 在一点 $x_0\in(a,b)$**连续**是指
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$
也就是说，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个适当的 $\delta>0$，使得凡是 $|x-x_0|<\delta$ 时便有
$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

由这一定义可以看出，若函数 f 在 x_0 处连续，f 在 x_0 这一点必有极限并且极限值正是 $f(x_0)$，由此可见，f 必须在点 x_0 处有定义.

函数 f 在一点 x_0 处的图形(图 2-5)表明:不论平行于横轴的两条直线 $y=f(x_0)\pm\varepsilon$ 围成的带状区域多么狭窄,必可找到平行于纵轴的两条直线 $x=x_0\pm\delta$,使得当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时,相应的曲线段 $y=f(x)$将全部被包含在这两组平行直线所围成的矩形之中.

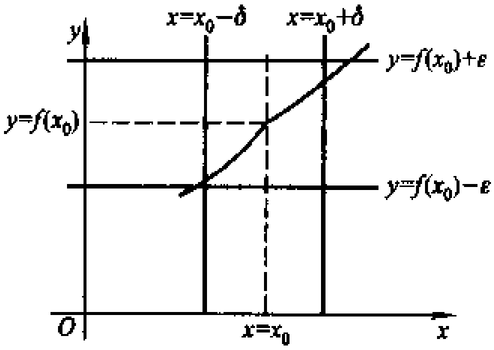

图 2-5

下面给出几个例子.

例 1 常值函数是处处连续的.

证明 设 $f=c$,这里 c 是一个实数.对于任意给定的 $x_0\in\mathbf{R}$ 和 $\varepsilon>0$,取 $\delta=1$,凡是满足 $|x-x_0|<1$ 的 x,都有

$$|f(x)-f(x_0)|=|c-c|=0<\varepsilon. \quad \square$$

例 2 函数 $f(x)=x$ 是处处连续的.

证明 对于任意给定的 $x_0\in\mathbf{R}$ 和 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,凡是满足 $|x-x_0|<\delta$ 的 x,都有

$$|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\varepsilon. \quad \square$$

例 3 正弦函数与余弦函数在每一个实数值上是连续的.

证明 任取 $x_0\in\mathbf{R}$,作和差化积

$$\sin x-\sin x_0=2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right).$$

由此可见,对任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,凡是 $|x-x_0|<\delta$ 时,便有

$$\begin{aligned}|\sin x-\sin x_0|&\leqslant 2\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|\\&\leqslant 2\left|\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|=|x-x_0|<\varepsilon,\end{aligned}$$

可见正弦函数在 x_0 处连续.

又因为

$$|\cos x-\cos x_0|=\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{\pi}{2}-x-\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)\right|=|x-x_0|,$$

根据同样的方法,也就证明了余弦函数在 x_0 处是连续的. □

例 4 设 D 是§2.4 例 5 中定义的 Dirichlet 函数. 证明

1° D 在每一点都不连续;

2° 令 $f(x)=xD(x)$,则 f 除在 $x=0$ 处连续之外,其他各处都不连续.

证明 1° §2.4 例 5 已经证明对于任意 $x_0\in\mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$都不存在,当然在 x_0 不连续.

2° 先证 f 在 $x_0=0$ 处连续. 此时 $f(0)=0$. 对任意给定的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,凡是$|x-0|=|x|<\delta$ 时,我们有

$$|f(x)-f(0)|=|xD(x)|\leqslant|x|<\delta=\varepsilon,$$

所以 f 在 $x=0$ 处是连续的.

现在设 $x\neq0$. 这时$\dfrac{f(x)}{x}=D(x)$. 如果 f 在 $x_0\neq0$ 连续,那么

$$\lim_{x\to x_0}D(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{x_0}$$
$$=\frac{f(x_0)}{x_0}=D(x_0).$$

这表明 D 在 x_0 处连续,这是矛盾. 这说明 f 只在 $x=0$ 处连续. □

这个例子说明存在着处处不连续的函数,也存在着只有一个连续点的函数,而这些都是通过 Dirichlet 函数来表达的.

既然我们可以定义单边极限,我们也就可以定义单边连续.

定义 2.18 如果 $f(x_0+)=f(x_0)$,则称函数 f 在 x_0 处**右连续**;如果 $f(x_0-)=f(x_0)$,则称函数 f 在 x_0 处**左连续**.

非常明显,函数 f 在 x_0 连续必需且只需 $f(x_0-)=f(x_0+)=f(x_0)$.

例 5 指数函数 a^x 在其定义域上的每一个点处是连续的.

(在这里,a 必须满足 $a>0$ 且 $a\neq1$. 当 $a=1$ 时 a^x 退化成常值函数,不算在指数函数之列.)

证明 我们首先证明 $f(x)=a^x$ 在 $x=0$ 处是连续的. 即要证明:

$$\lim_{x\to0}a^x=f(0)=1.$$

先设 $a>1$,此时 f 是严格递增的. 在§1.4 的例 4 中已经证明 $\lim\limits_{x\to\infty}a^{1/n}=1$,因此

对任意给定的 $\varepsilon>0$,必存在一个正整数 N,使得

$$0<a^{1/N}-1<\varepsilon.$$

此时,取 $\delta<\frac{1}{N}$,凡是 $x\in(0,\delta)$时,可以推知

$$0<a^x-1<a^\delta-1=a^{1/N}-1<\varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{x\to 0+}a^x=1(\text{其中 } a>1).$$

如果 $0<a<1$,我们有

$$\lim_{x\to 0+}a^x=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{a^x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{a}\right)^x}=\frac{1}{1}=1.$$

我们已经证明 $f(0+)=f(0)=1$.我们再来计算 $f(0-)=\lim\limits_{x\to 0}a^x$.作变换 $y=-x$,因此

$$f(0-)=\lim_{y\to 0+}a^{-y}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0+}a^y}=\frac{1}{1}=1.$$

这样就证明了 a^x 在 $x=0$ 处是连续的.

最后来讨论 $x\to x_0$,其中 x_0 为任意给定的实数的情况.由于

$$\lim_{x\to x_0}a^x=\lim_{x\to x_0}a^{x_0}a^{x-x_0}=a^{x_0}\lim_{x\to x_0}a^{x-x_0}=a^{x_0}\lim_{t\to 0}a^t,$$

这正是

$$\lim_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}.\quad\square$$

如果始终都坚持用定义来证明函数在一点处是连续的,实在是太辛苦了.我们知道,"连续"是通过极限来定义的,充分地利用已经揭示出的函数极限的各种性质,将大大简化证明.例如,利用函数极限四则运算的性质,我们可以立刻写出以下的定理.

定理 2.17 如果函数 f 与 g 在 x_0 处连续,那么 $f\pm g$ 与 fg 都在 x_0 处连续;进一步,若有 $g(x_0)\neq 0$,则$\frac{f}{g}$也在 x_0 处连续.

这样一来,多项式、三角函数在它们各自的定义域上的每一点处连续.有理函数是指两个多项式之商,它在除去分母的零点之外的其他点处都是连续的.

用证明复合函数的极限定理的同样方法,立刻得到

定理 2.18 设函数 g 在 t_0 处连续,记 $g(t_0)$为 x_0;如果函数 f 在 x_0 连续,那么复合函数 $f\circ g$ 在 t_0 处连续.

定义 2.19 设 I 是一个开区间,例如(a,b),$(a,+\infty)$,$(-\infty,b)$或$(-\infty,+\infty)$.如果函数 f 在 I 的每一点处都连续,则称在 I 上**连续**.设 $I=[a,b]$,我们

说 f 在 I 上连续是指 f 在 (a,b) 上连续并且在 a 点处右连续同时在 b 点处左连续.人们也说 f 是 I 上的**连续函数**.不论区间 I 是开或闭,是有限或无穷,我们用 $C(I)$ 记 I 上连续函数的全体.

利用定理 2.18,可以从已知的连续函数出发,使用函数复合的技巧,得出不可胜数的其他的连续函数,例如 $\sin a^x$, $\cos(\sin x)$ 等等.

定理 2.19 设 f 在区间 I 上严格递增(减)的连续函数,那么 f^{-1} 是 $f(I)$ 上的严格递增(减)的连续函数.

证明 在定理 2.24 之后的推论 2°中,我们将看到 $J=f(I)$ 也是一个区间.我们来证明 f^{-1} 在 J 上是连续的.不妨设 f 在 I 上严格递增.任取 $y_0\in J$,令 $x_0=f^{-1}(y_0)$(即 $y_0=f(x_0)$).任意地给定 $\varepsilon>0$,使得 $x_0-\varepsilon$ 与 $x_0+\varepsilon$ 都在 I 中,令

$$\delta_1=y_0-f(x_0-\varepsilon)>0,$$
$$\delta_2=f(x_0+\varepsilon)-y_0>0,$$
$$\delta=\min(\delta_1,\delta_2).$$

当 $|y-y_0|<\delta$ 时,我们有

$$y_0-\delta_1\leqslant y_0-\delta<y<y_0+\delta\leqslant y_0+\delta_2.$$

由 f^{-1} 的严格递增的性质,可得

$$f^{-1}(y_0-\delta_1)\leqslant f^{-1}(y_0-\delta)<f^{-1}(y)$$
$$<f^{-1}(y_0+\delta)\leqslant f^{-1}(y_0+\delta_2),$$

这也就是

$$x_0-\varepsilon<f^{-1}(y)<x_0+\varepsilon,$$

上式还可以写成等价的形式 $|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon$.这个式子成立的条件是 $|y-y_0|<\delta$.这就说明 f^{-1} 在 y_0 处是连续的.因为 y_0 是在 J 上任取的,所以 f^{-1} 在 J 上连续. □

当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,$f(x)=x^n$ 作为一个 n 次的多项式,在 $\mathbf{R}$ 上是连续的.当限制在 $[0,+\infty)$ 上时,是严格递增的,因此它的反函数 $f^{-1}(x)=x^{1/n}$ 在 $[0,+\infty)$ 也是连续的.由此可知,对于任何正有理数 r,x^r 在 $[0,+\infty)$ 是连续的.

现在考察指数函数 a^x.当 $a>1$ 时,它在 $\mathbf{R}$ 上是严格递增的连续函数;它的反函数记作 $\log_a x$,是 $(0,+\infty)$ 上的严格递增的连续函数.特别,当 $a=\mathrm{e}$ 时,$\ln x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的严格递增的连续函数.

幂函数 $f(x)=x^\mu$(其中 $x>0$,而 μ 为任意指定的实数).如果把幂函数等价地写成

$$f(x)=\mathrm{e}^{\mu\ln x}\quad(\text{其中 } x>0),$$

可见幂函数在 $(0,+\infty)$ 上是连续的.

由于正弦函数在 $\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上是严格递增的，所以它的反函数 $\arcsin x$定义在$[-1,1]$上，其值域是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$；余弦函数 $\cos x$ 在$[0,\pi]$上是严格递减的，它的反函数 $\arccos x$ 被定义在$[-1,1]$上，其值域是$[0,\pi]$. 正切函数$\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上是严格递增的，它的反函数 $\arctan x$ 被定义在$(-\infty,+\infty)$，严格递增地在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$中变化. 这三个反函数在各自的定义域上都是连续的.

多项式函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数，以及由它们经过有限次的四则运算、有限次复合所形成的函数，统称为**初等函数**. 这样，我们已经证明了下面的定理.

定理 2.20 初等函数在它们的定义域上都是连续的.

设 x_0 是函数 f 的定义域中的一点，如果 f 在 x_0 连续，称 x_0 是 f 的**连续点**；如果 f 在 x_0 不连续，则称 x_0 为 f 的**间断点**. 间断点有不同的类型，请看下面的

定义 2.20 设 x_0 是函数 f 的间断点，

1° 如果 $f(x_0+)$与 $f(x_0-)$存在，并是有限的数，但 $f(x_0+)\neq f(x_0-)$，则称 x_0 是 f 的一个**跳跃点**，差$|f(x_0+)-f(x_0-)|>0$ 称为 f 在这一点的**跳跃**；

2° 如果 $f(x_0+)$与 $f(x_0-)$存在、有限，并且 $f(x_0+)=f(x_0-)$，但不等于 $f(x_0)$，这时称 x_0 是 f 的**可去间断点**(意思是说，如果修改函数 f 在 x_0 处的值，可使 x_0 成为新的函数的连续点)；

3° 如果 $f(x_0+)$与 $f(x_0-)$二者中至少有一个不存在或者为非有限的数，那么 x_0 叫做 f 的**第二类间断点**.

跳跃点和可去间断点统称为 f 的**第一类间断点**.

在下面三个函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\geqslant 0\\ x, & x<0\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0,\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

中，f 以 $x=0$ 为跳跃点，g 以 $x=0$ 为可去间断点，而 h 则以 $x=0$ 为第二类间

断点.

对于区间上的单调函数,我们可对它的间断点有比较确切的了解.

定理 2.21 设 f 是区间 (a,b) 内的递增(递减)的函数,则 f 的间断点一定是跳跃点,而且跳跃点集是至多可数的.

证明 不妨设 f 在 (a,b) 上递增.任意取定 $x\in(a,b)$,这时数集 $\{f(t):a<t<x\}$ 是有上界的,因为 $f(x)$ 就是它的一个上界.从而这个数集有上确界(记作 A).很显然,$A\leqslant f(x)$.我们来证明 $f(x-)=A$.

事实上,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,由于 A 是上述集合的最小上界,故存在 $\delta>0$,使得 $a<x-\delta$ 并且

$$A-\varepsilon<f(x-\delta).$$

由于 f 是递增的,我们有

$$f(x-\delta)\leqslant f(t)\leqslant A$$

对 $t\in(x-\delta,x)$ 成立.结合最后的两个不等式,我们得出 $|f(t)-A|<\varepsilon$ 对 $t\in(x-\delta,x)$ 成立,因此 $f(x-)=A$ 得证.用同样的方法,可以证明 $f(x+)$ 存在且有限,并且

$$f(x-)\leqslant f(x)\leqslant f(x+).$$

任取 $x\in(a,b)$,当 $f(x-)=f(x+)$ 时函数 f 在点 x 处连续;只有当 $f(x+)>f(x-)$ 时 f 以点 x 为跳跃点,所以说 f 在 (a,b) 上只能有跳跃类型的间断点.最后我们指出,跳跃点集至多可数.为此,设 E 表示函数 f 在 (a,b) 上的间断点的全体.任取一点 $x\in E$,这时 $f(x-)<f(x+)$.在开区间 $(f(x-),f(x+))$ 内任意取出一个有理数,记作 $r(x)$.因为当 $x_1,x_2\in E$ 且 $x_1<x_2$ 时可推出 $f(x_1+)\leqslant f(x_2-)$ 故有 $r(x_1)<r(x_2)$.

我们可以利用 $x\to r(x)$ 这一关系,将集 E 与有理数集的一个子集之间建立了 1-1 对应;由于后者是至多可数的,所以 E 也是至多可数的. □

我们已经证明了初等函数在它们的定义域上都是连续的.现在又证明了单调函数的间断点是至多可数的,那么,是不是存在间断点不可数的函数呢?前面的 Dirichlet 函数是一个处处不连续的函数的例子,它的间断点的集合为 $\mathbf{R}$,是不可数集.

练习题 2.7

1. 回答下列问题:

(1) 设 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$,能否定义 $f(0)$ 使得 f 在 $x=0$ 处是连续的?

(2) 设 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$，如何理解函数 f 的定义域？

(3) 函数 f 在点 x_0 近旁有定义，并有

$$\lim_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0),$$

问 f 是否在 x_0 处连续？

(4) 函数 f 在点 x_0 近旁有定义，并有

$$\lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0-h))=0,$$

问 f 是否在 x_0 处连续？

(5) 连续函数 f 在点 (a,b) 上的全体有理点上取 0 值，问 f 是怎样的函数？

2. 研究下列函数在 $x=0$ 处的连续性：

(1) $f(x)=|x|$；

(2) $f(x)=[x]$；

(3) $f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时};\end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } x=0 \text{ 时};\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}(1+x^2)^{1/x^2}, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时},\\ 2.7, & \text{当 } x=0 \text{ 时}.\end{cases}$

3. 定出 a,b 和 c，使得函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{当 } x\leqslant -1 \text{ 时};\\ ax^2+bx+c, & \text{当 } |x|<1 \text{ 但 } x\neq 0 \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } x\geqslant 1 \text{ 时}\end{cases}$$

4. 讨论函数 $f+g$ 和 fg 在 x_0 处的连续性，如果：

(1) f 在 x_0 处连续，但 g 在 x_0 处不连续；

(2) f 和 g 在 x_0 处都不连续.

5. 设函数 f 在 x_0 连续，$f(x_0)>0$，则当 x 充分靠近 x_0 时有

$$f(x)>\frac{f(x_0)}{2}.$$

6. 设函数 f 在 x_0 连续，则 $|f|$ 和 f^2 都在 x_0 连续，反之是否成立？

7. 设函数 f,g 在 (a,b) 上连续，令

$$F(x)=\max(f(x),g(x)),x\in(a,b);$$

$$G(x)=\min(f(x),g(x)),x\in(a,b).$$

证明:F 和 G 是(a,b)上的连续函数.

8. 设函数 f 只有可去间断点,令

$$g(x)=\lim_{t\to x}f(t),$$

则 g 是一连续函数.

9. 函数 f 在 $\mathbf{R}$ 上递增(或递减),定义 $F(x)=f(x+)$,则 F 在 $\mathbf{R}$ 上右连续.

10. 设 f 在 $\mathbf{R}$ 上连续,且对一切 $x,y\in\mathbf{R}$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.证明:$f(x)=f(1)x$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 成立.

问题 2.7

1. 设 $f_i\in C[a,b]$,$i=1,2,3$.定义 $f(x)$是三个数 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$中介于中间的那一个,证明:$f\in C[a,b]$.

2. 设 f 在(a,b)上只有第一类间断点,且对一切 $x,y\in(a,b)$有不等式

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2},$$

求证:$f\in C(a,b)$.

3. 设 f 对一切 $x,y\in\mathbf{R}$ 适合函数方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

(1) 若 f 在一点 x_0 处连续,则 $f(x)=f(1)x$;

(2) 若 f 在 $\mathbf{R}$ 上单调,也有 $f(x)=f(1)x$.

4. 设 f 是 $\mathbf{R}$ 上不恒等于零的连续函数,如果对任何 $x,y\in\mathbf{R}$ 有等式

$$f(x+y)=f(x)f(y).$$

证明:$f(x)=a^x$,式中 $a=f(1)$是一正数.

5. 设 $f\in C(0,+\infty)$,对任何 $x,y\in\mathbf{R}$ 有等式

$$f(xy)=f(x)f(y).$$

证明:$f=0$ 或者 $f(x)=x^a$,其中 a 为常数.

6. 设 $n\in\mathbf{N}^*$,求满足函数方程

$$f(x+y^n)=f(x)+(f(y))^n,\quad x,y\in\mathbf{R}$$

的一切函数 f.

7. 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,且 $f(x^2)=f(x)$对一切实数 x 成立.又 f 在 $x=0$ 与 $x=1$ 处连续.证明:f 为一常值函数.

§ 2.8 连续函数与极限计算

如果函数 f 在 x_0 处连续,那么

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

此式表明:计算函数 f 在其连续点的极限,就相当于计算在那一点的函数值.这就大大地简化了初等函数在其定义域上的每一点的极限的计算.函数 f 在 x_0 处连续这一事实也可以表示为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x).$$

这个式子表明:对于连续函数而言,极限符号与函数符号可以交换.

例 1 计算:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}$.

解 (1) 因为

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{1/x},$$

以及

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=\mathrm{e},$$

故所求的极限是

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln \mathrm{e}=1.$$

(2) 作变换 $t=a^x-1$. 当 $x\to 0$ 时 $t\to 0$,反之亦然.解出

$$x=\frac{\ln(1+t)}{\ln a}$$

之后,可见

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{t}{\ln(1+t)}\ln a.$$

由(1)即知

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\ln a.$$

(3) 当 $\alpha=0$ 时,极限值显然为 0. 当 $\alpha\neq 0$ 时,可写

$$\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}=\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}.$$

由(1)和(2)立刻可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha. \qquad \square$$

考察有理函数$\dfrac{p(x)}{q(x)}$,其中 p 与 q 都是多项式.设想我们打算求极限

$$l=\lim_{x\to x_0}\frac{p(x)}{q(x)}.$$

如果 x_0 不是 q 的零点,即 $q(x_0)\neq 0$,那么 $l=\dfrac{p(x_0)}{q(x_0)}$.今设 $q(x_0)=0$,这时 l 为一实数的必要条件是 $p(x_0)=0$,这是因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}p(x)&=\lim_{x\to x_0}\frac{p(x)}{q(x)}q(x)\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{p(x)}{q(x)}\lim_{x\to x_0}q(x)=l\cdot 0=0.\end{aligned}$$

这也就是 $p(x_0)=0$.因此,可以设

$$p(x)=(x-x_0)^{\alpha}p_1(x)(\alpha\in\mathbf{N}^*),$$
$$q(x)=(x-x_0)^{\beta}q_1(x)(\beta\in\mathbf{N}^*),$$

其中 $p_1(x_0)\neq 0$,并且 $q_1(x_0)\neq 0$.这样,便有

$$\frac{p(x)}{q(x)}=(x-x_0)^{\alpha-\beta}\frac{p_1(x)}{q_1(x)}.$$

这时,显然可见 l 为有限数当且只当$\alpha\geqslant\beta$.更精确地说:当 $\alpha>\beta$ 时 $l=0$;当 $\alpha=\beta$ 时 $l=\dfrac{p_1(x_0)}{q_1(x_0)}$.

以上的推理表明,我们有一种确定的方法来计算任何有理函数的极限.

例 2　设 $m\in\mathbf{N}^*$,计算极限

$$l=\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x-1}.$$

解　因为

$$x^m-1=(x-1)(x^{m-1}+\cdots+x+1),$$

可见

$$l=\lim_{x\to 1}(1+x+\cdots+x^{m-1})=m. \qquad \square$$

例 3　设 $m,n\in\mathbf{N}^*$,计算极限

$$l=\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{x^m-1}-\frac{n}{x^n-1}\right).$$

解　因为

$$\frac{m}{x^m-1}-\frac{m}{x^n-1}=\frac{1}{x-1}\left(\frac{m}{1+x+\cdots+x^{m-1}}-\frac{n}{1+x+\cdots+x^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{m(1+x+\cdots+x^{n-1}-n)-n(1+x+\cdots+x^{m-1}-m)}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{n-1})(x-1)}.$$

所以

$$l=\frac{1}{mn}\left(m\sum_{k=1}^{n-1}\lim_{x\to 1}\frac{x^k-1}{x-1}-n\sum_{k=1}^{m-1}\lim_{x\to 1}\frac{x^k-1}{x-1}\right).$$

利用例 2 的结果,有

$$\begin{aligned}l&=\frac{1}{mn}\left(m\sum_{k=1}^{n-1}k-n\sum_{k=1}^{m-1}k\right)\\&=\frac{1}{mn}\left(\frac{mn(n-1)}{2}-\frac{nm(m-1)}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}(n-1-m+1)=\frac{n-m}{2}.\quad\square\end{aligned}$$

现在转来讨论所谓"幂指函数".函数 $u(x)^{v(x)}$,其中 $u(x)>0$,称为**幂指函数**.例如,我们已经研究过的函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$,就是幂指函数的一个例子.在其定义域之内,我们有等式

$$u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)},$$

可见当 u,v 为连续函数时,幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 也是连续函数.

如果在某一极限过程中(我们不明确标出这一过程,以使它有更大的灵活性)有

$$\lim u(x)=1,\lim v(x)=\infty,$$

那么称极限 $\lim u(x)^{v(x)}$ 是"1^∞ 型"的.这里 1^∞ 仅仅是一个符号,不能误认它为"1 的无穷次幂"——这种说法本身就毫无意义.利用这个符号,极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

就是"1^∞ 型"的.

我们的目的是要指明:利用连续函数计算 1^∞ 型的极限时,有一套固定的步骤可以将它确定出来.把幂指函数 u^v 改写为

$$u^v=((1+(u-1))^{1/(u-1)})^{(u-1)v}.$$

记 $A=u-1$,当 $u\to 1$ 时 A 为无穷小量,因为

$$\lim_{A\to 0}(1+A)^{1/A}=e.$$

因此只要极限

$$\lambda=\lim(u-1)v$$

存在并有限,那么立即得出

$$\lim u^v=e^\lambda.$$

例 4 设 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 是任意给定的正数,计算极限

$$l=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{1/x}.$$

解　当 $x\to 0$ 时 $a_i^x\to 1, i=1,2,\cdots,n$. 可见这个极限是 1^∞ 型. 令

$$A=\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x-n}{n},$$

因为 $v=\dfrac{1}{x}$,所以

$$Av=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^x-1}{x}.$$

于是

$$\lambda=\lim_{x\to 0}Av=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln a_i=\ln(a_1\cdots a_n)^{1/n}.$$

最后得到

$$l=e^{\lambda}=(a_1\cdots a_n)^{1/n}.$$

即极限 l 等于这 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的几何平均数. □

例 5　计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

解　显然,这个极限是 1^∞ 型. 令

$$A=\cos\frac{1}{x}-1,$$

此时 $v=x^2$,所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}Av&=\lim_{x\to\infty}x^2\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)\\&=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t^2}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

至此,我们用了代换 $t=\dfrac{1}{x}$. 最后得出

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\frac{1}{\sqrt{e}}.\quad\square$$

练习题 2.8

1. 计算极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}, n\in\mathbf{N}^*$;

(5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}, n\in\mathbf{N}^*$.

2. 计算极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}, m,n\in\mathbf{N}^*$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}, m\in\mathbf{N}^*$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}, m,n\in\mathbf{N}^*$;

(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}, n\in\mathbf{N}^*$.

3. 计算极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{1/x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$;　(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\tan x)^{\tan 2x}$;　(6) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\tan x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$;　(8) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{1/x}$;

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}$;　(10) $\lim\limits_{x\to0}(2e^{x/(1+x)}-1)^{(x^2+1)/x}$;

(11) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}, a\neq\pm k\pi, k\in\mathbf{N}^*$.

4. 设 $|x|<1$，求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+x^2+\cdots+x^n}{n}\right)^n.$$

§ 2.9　函数的一致连续性

设 I 是一个区间，它可以是开的，半开的，闭的，也可以是无界的. 函数 $f: I$

$\to\mathbf{R}$. 我们给出下列

定义 2.21 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在一个 $\delta>0$,使得凡是 $x_1,x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,便有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$,这时称函数 f 在区间 I 上是**一致连续**的.

乍看起来,这里的一致连续的定义,同过去的函数在一点连续的定义非常相近.实际上,这两者之间存在着原则的差别.很显然的是:如果 f 在 I 上一致连续,那么 f 在 I 的每一点上必连续,即 f 在 I 上连续.但是,当 f 在 I 上连续时,一般地说,我们不能作出函数 f 在区间 I 上一致连续的结论.让我们从研究以下的例子中来体会这种差别.

例 1 试证函数 $\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是一致连续的.

证明 首先,对任何 $x_1,x_2\geqslant 0$,有不等式 $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\geqslant\sqrt{|x_2-x_1|}$.事实上,设 $x_2\geqslant x_1\geqslant 0$,这时可得 $x_2\geqslant|x_2-x_1|$,从而

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\geqslant\sqrt{x_2}\geqslant\sqrt{|x_2-x_1|}.$$

于是,当 $x_1\neq x_2$ 时,

$$|\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}|=\frac{|x_2-x_1|}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}\leqslant\frac{|x_2-x_1|}{|x_2-x_1|^{1/2}}=|x_2-x_1|^{1/2}.$$

可见对任意给定的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon^2$,凡是 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,便有

$$|\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}|\leqslant|x_2-x_1|^{1/2}<\delta^{1/2}=\varepsilon.$$

这表明函数 $\sqrt{x}$ 在其定义域上是一致连续的. □

例 2 由于对任何实数 x_1,x_2,有

$$|\sin x_1-\sin x_2|\leqslant|x_1-x_2|,$$
$$|\cos x_1-\cos x_2|\leqslant|x_1-x_2|,$$

可见函数 $\sin x$ 与 $\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致连续. □

为了证明某个函数在区间 I 上"不一致连续",我们需要不一致连续的精确表述.

函数 f 在区间 I 上**不是一致连续**的,当且只当:存在一个 $\varepsilon_0>0$,对每一个 $n\in\mathbf{N}^*$ 都可以在 I 中找到两点,记为 s_n 与 t_n,使得虽然有 $|s_n-t_n|<\frac{1}{n}$,但是

$$|f(s_n)-f(t_n)|\geqslant\varepsilon_0.$$

按照以上的表述,证明"不一致连续"就变得比较容易了.

例 3 求证:在区间 $I=[0,+\infty)$ 上:

1° 函数 x 一致连续;

2° 当 $n=2,3,4,\cdots$时,x^n 不一致连续.

证明 1° 的证明是十分明显的,只要取 $\delta=\varepsilon$ 就可以完成.

2° 我们先证 x^2 在 I 上不一致连续.对任何 $n\in\mathbf{N}^*$,在 I 中取两个点:

$$s_n=n,\ t_n=n+\frac{1}{2n}.$$

这时 $0<t_n-s_n=\dfrac{1}{2n}<\dfrac{1}{n}$,但是

$$\begin{aligned}0<t_n^2-s_n^2&=(t_n-s_n)(t_n+s_n)\\&=\frac{1}{2n}\left(2n+\frac{1}{2n}\right)>1,\end{aligned}$$

所以 x^2 在$[0,+\infty)$上不一致连续.

当 $n\geqslant 3$ 时,在任何 x_1,x_2 满足 $x_2>x_1\geqslant 1$ 的条件下,易证

$$x_2^n-x_1^n>x_2^2-x_1^2.$$

由 x^2 在$[0,+\infty)$上不一致连续,立刻可知 x^n(当 $n\geqslant 3$ 时)在$[0,+\infty)$上也是不一致连续的. □

例 4 求证:函数 $\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上是不一致连续的.

证明 对任何 $n\in\mathbf{N}^*$,取

$$s_n=\frac{1}{2n\pi+\pi/2}\in(0,1),$$

$$t_n=\frac{1}{2n\pi}\in(0,1),$$

我们有

$$0<t_n-s_n=\frac{\pi/2}{2n\pi(2n\pi+\pi/2)}<\frac{1}{2n\pi}<\frac{1}{n},$$

但是

$$\left|\sin\frac{1}{t_n}-\sin\frac{1}{s_n}\right|=\left|\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|=1.$$

这就证明了函数 $\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上不是一致连续的. □

例 3 的 2°以及例 4 中的函数在指定的区间之内虽然不是一致连续的,但是作为初等函数,它们在相应的区间内是连续的.由此可见:“连续”和“一致连续”有着重大区别.当然,函数 f 在区间 I 上的一致连续性蕴涵着 f 在 I 上的连续性.

为什么有些函数在指定的区间上连续但不一致连续?为了弄清这种差异是怎样产生的,先让我们回忆函数 f 在区间 I 上连续的定义:对于任何 $x_0\in I$,对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,凡是 I 中的点 x 满足 $|x-x_0|<\delta$ 时,就必有

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 目前我们应当特别强调的是:$\delta$ 不仅仅与给定的 ε 有关(过去我们指出过这一点),而且与点 x_0 的位置有关(我们不曾强调这一点). 区间 I 上有不可数的无穷个点. 对于同一个 $\varepsilon>0$,相应地就有不可数无穷个 δ,在这种情况下,我们无法保证最小的 δ 的存在. 而在一致连续的定义中,δ 完全只由 ε 所决定,与自变量在区间 I 上的位置毫无关系. 图 2-6 对读者的理解可能会有帮助. 考虑函数 $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in(0,1)$. 由不等式

$$\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|\leqslant\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|,\text{其中 } x_1,x_2\in(0,1)$$

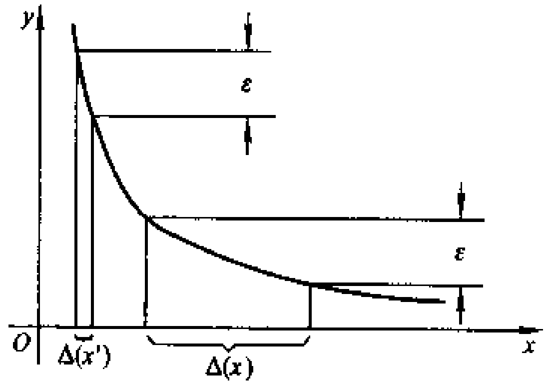

图 2-6

及例 4 可知,函数 $\frac{1}{x}$ 在这开区间上也是不一致连续的. 这一事实可以从几何图形上看得比较明显. 作函数 $y=\frac{1}{x}$, $x\in(0,1)$ 的图形(图 2-6),对于任意给定的 $\varepsilon>0$,作两条平行于横轴的直线,它们夹着一个"带形区域",带宽正好等于 ε. 在这两条直线与曲线 $y=\frac{1}{x}$ 的交点上,分别作平行于纵轴的直线,以这两条直线同横轴的两个交点为端点可以做一个开区间,记为 $\Delta(x)$,其中 x 表示 $\Delta(x)$ 的左端点. 凡是 $s,t\in\Delta(x)$,都能使得 $\left|\frac{1}{s}-\frac{1}{t}\right|<\varepsilon$. 对于同样的 $\varepsilon>0$,当 $0<x'<x$ 时, $|\Delta(x')|<|\Delta(x)|$,这里绝对值表示区间长度. 由于当 $x\to0$ 时曲线越来越陡峭,显然可见

$$\lim_{x\to0^+}|\Delta(x)|=0,$$

因此对这个 ε,一个统一的正数 δ 根本找不到!

大家也许已经发现,函数 $\frac{1}{x}$ 之所以在(0,1)上不一致连续,在于我们允许自变量可以向 0 无限制地靠近. 因此,如果不允许自变量任意地接近 0,也许可以

使连续变成一致. 这个观察是完全正确的, 因为我们有

例 5 对任意固定的 $\sigma>0$, 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[\sigma,+\infty]$ 上是一致连续的.

证明 任取 $s,t\in[\sigma,+\infty]$, 我们有

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right|=\frac{|s-t|}{st}\leqslant\frac{1}{\sigma^2}|s-t|.$$

由此可见, 对于任给的 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\sigma^2\varepsilon$, 只要 $s,t\in[\sigma,+\infty]$ 且 $|s-t|<\delta$ 时, 便有

$$\left|\frac{1}{s}-\frac{1}{t}\right|\leqslant\frac{1}{\sigma^2}\delta=\varepsilon,$$

这就证明了所需的结论. □

在怎样的区间上, 函数 f 的连续性也蕴涵 f 的一致连续性呢? 有界的闭区间就有这种特性. 在这类区间上, 连续函数还有其他一些十分重要的性质, 那正是下一节中要讨论的内容.

练习题 2.9

1. 研究下列函数的一致连续性:

   (1) $f(x)=\cos\frac{1}{x}, x>0$;

   (2) $f(x)=\sin^2 x, x\in\mathbf{R}$;

   (3) $f(x)=\sqrt[3]{x}, x\geqslant 0$;

   (4) $f(x)=\sin x^2, x\in\mathbf{R}$;

   (5) $f(x)=\frac{x}{1+x^2\sin^2 x}, x\geqslant 0$.

2. 设函数 f 和 g 在区间 I 上一致连续, 证明 $f+g$ 也在 I 上一致连续.
3. 证明在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的周期函数必在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续. 由此证明 $\sin^2 x+\sin x^2$ 不是周期函数.
4. 如果 f 在 (a,b) 上一致连续, 证明 $f(a+)$ 和 $f(b-)$ 存在且有限.

问题 2.9

1. 函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且对任何 $x\in[0,1]$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$ ($n\in$

$\mathbf{N}^*$),证明:$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.试举例说明,仅有 f 在$[0,+\infty)$上的连续性推不出上述结论.

2. 设 I 为区间,如果存在正常数 k,使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$$

对任何 $x,y\in I$ 成立,称 f 在 I 上**满足 Lipschitz 条件**.求证:如果 f 在$[a,+\infty)$上满足 Lipschitz 条件,这里 $a>0$,那么$\dfrac{f(x)}{x}$在$[a,+\infty)$上一致连续.

§2.10　有限闭区间上连续函数的性质

在本节里,我们讨论闭区间$[a,b]$,其中 a 与 b 都是实数.设函数 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 在该区间上连续.

定理 2.22　设函数 f 在$[a,b]$上连续,那么 f 在$[a,b]$上必定一致连续.

证明　用反证法.假设 f 在$[a,b]$上不一致连续,即存在 $\varepsilon_0>0$,对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,总能找到 $s_n,t_n\in[a,b]$,虽然$|s_n-t_n|<\dfrac{1}{n}$,但是

$$|f(s_n)-f(t_n)|\geqslant\varepsilon_0.\tag{1}$$

由于$\{s_n\}$是完全被包含在$[a,b]$中的数列,由列紧性定理可知,存在一个子列$\{s_{k_n}\}$,使

$$s_{k_n}\to s^*\in[a,b],\ n\to\infty.$$

这时,我们有

$$\begin{aligned}|t_{k_n}-s^*|&\leqslant|t_{k_n}-s_{k_n}|+|s_{k_n}-s^*|\\&<\frac{1}{k_n}+|s_{k_n}-s^*|\leqslant\frac{1}{n}+|s_{k_n}-s^*|,\end{aligned}$$

对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立.由上式可知 $t_{k_n}\to s^*\ (n\to\infty)$.由(1)得知:对一切 $n\in\mathbf{N}^*$,有

$$|f(s_{k_n})-f(t_{k_n})|\geqslant\varepsilon_0.\tag{2}$$

在(2)式双方令 $n\to\infty$,由 f 的连续性,得到

$$\begin{aligned}0&=|f(s^*)-f(s^*)|=|\lim_{n\to\infty}f(s_{k_n})-\lim_{n\to\infty}f(t_{k_n})|\\&=\lim_{n\to\infty}|f(s_{k_n})-f(t_{k_n})|\geqslant\varepsilon_0>0,\end{aligned}$$

这是矛盾.这就证明了 f 必在$[a,b]$上一致连续.　□

区间必须是闭的与有界的,这两个条件缺一不可.缺了其中任何一个,定理 2.22 的结论可能不成立.§2.9 的例 3 中的 2°及例 4,可以作为反例来说明之.

除了一致连续性外,有界闭区间上的连续函数还有下面四条重要的性质.

定理 2.23 有界闭区间上的连续函数必在该区间上有界.

证明 用反证法.设 f 在 $[a,b]$ 上连续,如果它在 $[a,b]$ 上没有上界,那么任意自然数 n 都不能作为它的上界,因而必有 $x_n\in[a,b]$,使得 $f(x_n)>n$, $n=1,2,\cdots$.由于 $[a,b]$ 是有限的闭区间,故从数列 $\{x_n\}$ 中可以选出一子数列 $\{x_{k_n}\}$,使得

$$x_{k_n}\to\xi\in[a,b](n\to\infty).$$

函数 f 的连续必要求

$$\lim_{n\to\infty}f(x_{k_n})=f(\xi);\tag{3}$$

但另一方面,由

$$f(x_{k_n})>k_n\geqslant n(\text{其中 } n=1,2,3,\cdots)$$

得出极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{k_n})=+\infty$,这和(3)矛盾.所以 f 在 $[a,b]$ 上必有上界.同理可证 f 在 $[a,b]$ 上有下界. □

如果 f 在某个开区间上连续,上面的结论不再成立,它可能是有界的,也可能是无界的.例如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上连续,它在 $(0,1)$ 上是无界的;$f(x)=x$ 在 $(0,1)$ 上连续,它当然还是有界的.如果 f 在某个无穷区间 $[a,+\infty)$ 上连续,上面的结论也不成立,请读者举出相应的例子.

从定理 2.23 还可得下面重要的

定理 2.24 设 f 在 $[a,b]$ 上连续,记

$$M=\sup_{x\in[a,b]}f(x),m=\inf_{x\in[a,b]}f(x),$$

则必存在 $x^*,x_*\in[a,b]$,使得

$$f(x^*)=M,f(x_*)=m.$$

也就是说,有界闭区间上的连续函数必能取到它在这区间上的最大值和最小值.

证明 由定理 2.23 知道,m 和 M 都是有限数.根据上确界的定义,对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,必定存在 $x_n\in[a,b]$,使得

$$M-\frac{1}{n}<f(x_n)\leqslant M.$$

和定理 2.23 的证明一样,从数到 $\{x_n\}$ 中可以选出子列 $\{x_{k_n}\}$,使得 $x_{k_n}\to x^*\in[a,b]$.在不等式

$$M-\frac{1}{k_n}<f(x_{k_n})\leqslant M$$

的两端让 $n\to\infty$，根据 f 的连续性即得

$$f(x^*)=M.$$

同理可证存在 $x_*\in[a,b]$，使得 $f(x_*)=m$. □

$[a,b]$上有一条连续曲线，如果 $f(a)<0,f(b)>0$，那么这条曲线和 x 轴至少有一个交点. 这一事实非常直观而且有用，这就是下面的

定理 2.25(零值定理) 设 f 在$[a,b]$上连续，如果 $f(a)$与 $f(b)$有相反的正负号，则必存在一点 $c\in(a,b)$，使得 $f(x)=0$

证明 不妨设 $f(a)<0<f(b)$. 把区间$[a,b]$二等分，分点是 $\dfrac{a+b}{2}$. 如果 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$，就取 $c=\dfrac{a+b}{2}$. 如果 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\neq0$，则 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$必与 $f(a),f(b)$中某一个异号，也就是说，在两个闭子区间

$$\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\left[\frac{a+b}{2},b\right]$$

中，必有一个使 f 在其两端点取值异号，记这个闭子区间为$[a_1,b_1]$，即$[a_1,b_1]$满足下面三个条件：

$$[a,b]\supset[a_1,b_1],0<b_1-a_1=\frac{b-a}{2},f(a_1)<0<f(b_1)$$

对$[a_1,b_1]$重复上面的讨论，就能得到一列闭区间$[a_k,b_k]$，满足：

(i) $[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset\cdots\supset[a_k,b_k]\supset\cdots$,

(ii) $0<b_k-a_k=\dfrac{1}{2^k}(b-a)$,

(iii) $f(a_k)<0<f(b_k)$.

如果对某个 k 有 $f\left(\dfrac{a_k+b_k}{2}\right)=0$，则取 $c=\dfrac{a_k+b_k}{2}$，定理就得到证明. 不然的话，就把这过程无限进行下去. 于是由闭区间套定理，存在 $c\in[a_k,b_k],k=1,2,\cdots$. 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}b_k=c$. 由 f 的连续性，在(iii)的两端取 $k\to\infty$ 的极限得 $f(c)\leqslant0\leqslant f(c)$，即 $f(c)=0$. □

零值定理有许多应用.

例 1 证明方程 $2^x-4x=0$ 在区间$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$内有一根.

证明 在区间$\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$上研究连续函数 $f(x)=2^x-4x$. 由于 $f(0)=1$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{2}-2<0$，可见存在一个数 $c\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，使得 $f(c)=0$，因此 c 就是原方程的一个根. □

例 2 证明:任何实系数奇次代数方程必有实根.

证明 设方程为

$$x^{2n+1}+a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\cdots+a_{2n-1}x+a_{2n}=0.$$

将方程左边的多项式记为 p.将 $p(x)$写成

$$p(x)=x^{2n+1}\left(1+\frac{a_0}{x}+\frac{a_1}{x^2}+\cdots+\frac{a_{2n}}{x^{2n+1}}\right).$$

由此得知

$$\lim_{x\to+\infty}p(x)=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}p(x)=-\infty.$$

因此,存在实数 a,b,使得 $a<b$ 且 $p(a)<0,p(b)>0$.依零值定理可知,存在 $c\in(a,b)$,使得 $p(c)=0$.这里的 c 就是原方程的一个实根. □

作为零值定理的应用,我们有下面的

定理 2.26(介值定理) 设 f 在区间$[a,b]$上连续,γ 是介于$f(a)$与 $f(b)$之间的任何实数,则必存在 $c\in(a,b)$,使得 $f(c)=\gamma$.

证明 不妨设 $f(a)<\gamma<f(b)$.命

$$g(x)=f(x)-\gamma,$$

则 g 在$[a,b]$上连续,且 $g(a)=f(a)-\gamma<0<f(b)-\gamma=g(b)$.于是由零值定理,存在 $c\in(a,b)$使得 $g(c)=0$,即 $f(c)=\gamma$. □

让我们利用上述定理来解决一个乍看起来令人感到迷糊的问题.某人登黄山,晨 6 时从山脚下出发,傍晚 6 时到达山顶.第二天早上 6 时,他开始下山,沿着同一条路径到达他前一天的出发地.请证明:在途中有一个地方,他的手表在这两天中指示着同一时间!

用这种提法来陈述问题,一时真令人迷惑.常常有这样的情况,当我们把同一问题换上另外一种更合适的提法之后,将导致容易的解答.上面这个登山问题,其实质与下列问题是相同的:甲、乙两人一个在山脚,另一个在山顶,他们在同一天的早上 6 点钟同时出发,甲上山而乙下山.很明显,他们必须在某一地方会面,这时他们各自的手表当然指向同一时间! 这一问题的解答的数学基础正是介值定理:把这两个人之间的"带有符号的距离"看成时间的函数,这个函数从早上 6 时起到这两人中第一个到达目的地的时间为止,在不断地变化,设它在早上 6 时取值为正,最后的时刻的函数值为负.由于这个函数是时间的连续函数,依介值定理,必然有一个时刻,这函数取值为 0.

推论 设非常值函数 f 在 $I=[a,b]$上连续,那么 f 的值域 $f(I)$是一个闭区间.

事实上,设 M 与 m 分别为 f 在$[a,b]$上的最大值和最小值,由介值定理可知 $f(I)=[m,M]$.

例 3 求证:有理函数

$$\frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}$$

在$(-\infty,+\infty)$上有界.

证明　这是一个偶函数.作变换 $t=x^2$,问题便转化为证明函数

$$f(t)=\frac{1+t}{1-t+t^2},t\in[0,+\infty)$$

有界.由于 $1-t+t^2=(1-t)^2+t>0$,可知 f 在$[0,+\infty)$上连续.当我们将 f 改写为

$$f(t)=\frac{1-t}{1+t+t(t-2)}$$

时,容易看出,当 $t>2$ 时 $0<f(t)<1$;而在有界闭区间$[0,2]$上,连续函数 f 是有界的.所以 f 在$[0,+\infty)$上也有界.

以上的证明只是保证了上、下界的存在性,并没有定出确界的值.要定出这些值,往往是不容易的,但是对当前的问题,初等的方法便可以解决.这是因为

$$f(t)=\left(1+t+\frac{3}{1+t}-3\right)^{-1},$$

利用算术平均－几何平均不等式,可得

$$f(t)\leqslant\left(2\sqrt{(1+t)\frac{3}{1+t}}-3\right)^{-1}=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

其中等号当 $t=\sqrt{3}-1$ 时成立.

这就是说,在$(-\infty,+\infty)$上,原来那个有理函数可以取得最大值 $1+\frac{2}{3}\sqrt{3}=2.1547005\cdots$;下确界是0,不可达到,这是因为当 $t\to+\infty$ 时 $f(t)\to 0+$.　□

练习题 2.10

1. 如果 f 在(a,b)上一致连续,证明 f 在(a,b)上有界.
2. 若函数 f 和 g 都在区间 I 上一致连续,问 fg 是否在 I 上一致连续?试就 I 为有限区间或无穷区间分别讨论之.
3. 设函数 f 在开区间(a,b)上连续,$f(a+)$和 $f(b-)$存在且有限,证明 f 在(a,b)上一致连续.
4. 设函数 f 在区间$[a,+\infty)$上连续,$f(+\infty)$存在且有限,证明 f 在$[a,+\infty)$上一致连续.
5. 设 f 在区间$[a,+\infty)$上连续,若存在常数 b 和 c,使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-bx-c)=0$,证明 f 在$[a,+\infty)$上一致连续.

6. 求证三次方程 $x^3+2x-1=0$ 只有惟一实根,此根在(0,1)内.

7. 设 $\varphi\in C(\mathbf{R})$,且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\varphi(x)}{x^n}=0.$$

(1) 证明:当 n 为奇数,方程 $x^n+\varphi(x)=0$ 有一实根;

(2) 证明:当 n 为偶数,有一数 y 使得对所有的 $x\in\mathbf{R}$ 有

$$y^n+\varphi(y)\leqslant x^n+\varphi(x).$$

8. 设 $f\in C[0,1]$ 且 $f(0)=f(1)$,求证:对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 存在 $x_n\in[0,1]$ 使得 $f(x_n)=f\left(x_n+\dfrac{1}{n}\right)$.

9. 设 $f\in C(\mathbf{R})$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$,又设 f 的最小值 $f(a)<a$,求证 f^2 至少在两个点上取到最小值.这里 $f^2=f\circ f$.

10. 函数 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$.若 f 在有理点上取无理数值,在无理点上取有理数值,证明 f 不是 $[a,b]$ 上的连续函数.

11. 设对于任意 $x,y\in(-\infty,+\infty)$,函数 f 满足 $|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$ $(0<k<1)$.求证:

(1) 函数 $kx-f(x)$ 递增;

(2) 存在惟一的 $\xi\in(-\infty,+\infty)$,使 $f(\xi)=\xi$.

问题 2.10

1. 设 $f\in C(\mathbf{R})$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(f(x))=\infty$,求证 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

2. 设 $f,g\in C([a,b])$,如果存在 $x_n\in[a,b]$,使得 $g(x_n)=f(x_{n+1})$,$n=1,2,\cdots$,则必存在 $x_0\in[a,b]$,使得 $f(x_0)=g(x_0)$.

3. 设函数 f 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续、有界,求证:对每一数 $\lambda>0$,存在数列 $x_n\to+\infty$,使

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n+\lambda)-f(x_n))=0.$$

4. (1) 证明:不存在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数,使它的任一函数值都被恰好取到两次.

(2) 是否存在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数,使它的任一函数值都被恰好取到三次?

§2.11　函数的上极限和下极限

在§1.11中，我们引进了数列的上极限和下极限.对一个数列来说，它的极限不一定存在，但是它的上极限和下极限却总是存在的.且当数列的极限存在的时候，这个极限值正好是上、下极限.由此可见，使用上、下极限来讨论问题，可以较少地受到约束.根据同样的理由，我们也引进函数的上、下极限的概念.

在§1.10中，我们定义过记号$\mathbf{R}_\infty=\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$，即实数的全体再加上两个记号$-\infty$与$+\infty$.

设函数f定义在$I=(x_0-\Delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\Delta)$上，我们设$f$在点$x_0$近旁**有界**.这时，一定存在$x_n\in I$，$n=1,2,\cdots$，使得$x_n\to x_0$（当$n\to\infty$时）并且数列$\{f(x_n)\}$收敛于一个数.如果$f$在$x_0$的近旁无上(下)界，则必存在数列$x_n\in I$，$x_n\to x_0$（当$n\to\infty$时）使得当$n\to\infty$时$f(x_n)\to+\infty(-\infty)$.

定义 2.22　命

$E=\{l\in\mathbf{R}_\infty$：有数列$x_n\in I$，且$x_n\to x_0$，使得$f(x_n)\to l\}$.

这是一个非空的集合.置$a^*=\sup E$，$a_*=\inf E$，分别称它们为f当$x\to x_0$时的**上极限和下极限**，分别记作

$$\limsup_{x\to x_0}f(x),\ \liminf_{x\to x_0}f(x).$$

对于其他的极限过程，例如$x\to x_0+$，$x\to x_0-$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$以及$x\to\infty$，可以类似地定义函数f的**上极限和下极限**.

例 1

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq0\text{ 时};\\ 0 & \text{当 } x=0\text{ 时}.\end{cases}$$

对于$n\in\mathbf{N}^*$，令

$$x_n=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{-1},y_n=\left(2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)^{-1}.$$

显然，$x_n\to0$，$y_n\to0$（当$n\to\infty$时）；并且，

$$f(x_n)=f(-y_n)=1,$$
$$f(-x_n)=f(y_n)=-1.$$

所以

$$\limsup_{x\to0^-}f(x)=\limsup_{x\to0^+}f(x)=\limsup_{x\to0}f(x)=1,$$
$$\liminf_{x\to0^-}f(x)=\liminf_{x\to0^+}f(x)=\liminf_{x\to0}f(x)=-1.\quad\square$$

与定理 1.15 平行，可以对函数的上极限建立如下的定理.

定理 2.27 设函数 f 定义在 I 上，那么

1° $a^* \in E$；

2° 若 $y > a^*$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) < y$；

3° a^* 是满足前述两条性质的惟一的数.

证明 1° 若 $a^* = +\infty$，则对任何 $n \in \mathbf{N}^*$，必存在 $l_n \in E$ 使得 $l_n > n$. 由此可知，存在 x_n 满足 $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ 且 $f(x_n) > n$. 这表明 $x_n \in I$，$x_n \to x_0$ 使得 $f(x_n) \to +\infty$，即 $a^* = +\infty \in E$.

若 $a^* = -\infty$，即 $E = \{-\infty\}$，当然 $a^* \in E$.

再设 a^* 为有限数. 对任何 $n \in \mathbf{N}^*$，存在 $l_n \in E$ 使得

$$a^* - \frac{1}{n} < l_n < a^* + \frac{1}{n}.$$

于是，存在 x_n 适合 $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$，使得

$$a^* - \frac{1}{n} < f(x_n) < a^* + \frac{1}{n}.$$

从而 $x_n \in I$ 且 $x_n \to x_0$ 使得 $f(x_n) \to a^*$. 所以 $a^* \in E$.

2° 设 $y > a^*$. 假设命题不真，则对任何 $n \in \mathbf{N}^*$，存在 x_n，满足 $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$，使得 $f(x_n) \geqslant y$. 于是，存在子列 $\{x_{k_n}\}$，使得 $f(x_{k_n}) \to y_1 (n \to \infty)$. 由此得到 $y_1 \geqslant y > a^*$，且 $y_1 \in E$. 这与 a^* 的定义相矛盾.

3° 证明惟一性. 设有两数 p 与 q 同时满足 1°与 2°，但 $p < q$. 选取 y，适合 $p < y < q$. 因为 p 满足 2°，故存在 $\delta > 0$，使 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) < y$，则 q 不能满足 1°. □

对于 a_*，也可以建立类似的定理.

下面的定理列举了函数的上、下极限的简单性质，它们在应用中能提供很多方便.

定理 2.28 设 f, g 在 I 上有定义，那么

1° $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) \leqslant \limsup\limits_{x \to x_0} f(x)$；

2° $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ 当且只当 $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) = \limsup\limits_{x \to x_0} f(x) = a$；

3° 若当 $x \in I$ 时有 $f(x) \leqslant g(x)$ 成立，那么

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \leqslant \liminf_{x \to x_0} g(x);$$

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leqslant \limsup_{x \to x_0} g(x).$$

证明 1°与2°甚为明显,只须证明3°.我们来证其中的第二个不等式.置

$$a^* = \limsup_{x\to x_0} f(x),\ b^* = \limsup_{x\to x_0} g(x).$$

存在子数列 $x_n\in I$,且 $x_n\to x_0$,使得$\lim\limits_{n\to 0} f(x_n)=a^*$.另外,由 $f(x_n)\leqslant g(x_n)$, $n=1,2,3,\cdots$,可以从$\{x_n\}$中选出子列$\{x_{k_n}\}$,使得

$$\lim_{n\to\infty} g(x_{k_n}) = b \geqslant a^* = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}).$$

由 b^* 的定义,又知 $b^*\geqslant b\geqslant a^*$,这正是我们需要证明的.3°的第一个不等式也可以类似地证明. □

最后我们指出,数列的上、下极限可以看成是函数的上、下极限的特殊情况.设有数列$\{a_n\}$在$(0,1)$上定义函数 f:

$$f(x)=a_n,\text{当 } x\in\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right),n=1,2,\cdots.$$

不难证明

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{x\to 0^+} f(x),$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \liminf_{x\to 0^+} f(x).$$

练习题 2.11

1. 设函数 f 在一点 x_0 的左旁$(x_0-\delta,x_0)$连续,又

$$\liminf_{x\to x_0^-} f(x) < \alpha < \limsup_{x\to x_0^-} f(x),$$

求证:一定有数列 $x_n\to x_0^-$,使 $f(x_n)=\alpha$, $n=1,2,3,\cdots$.

2. 对下列函数 f,求$\limsup\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\liminf\limits_{x\to\infty} f(x)$.

(1) $f(x)=\sin x$;

(2) $f(x)=x^2\cos x$;

(3) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2\sin^2 x}$.

3. 设函数 f 在 x_0 的空心邻域有定义.令

$$\varphi(\delta)=\inf\{f(x):0<|x-x_0|<\delta\},$$
$$\psi(\delta)=\sup\{f(x):0<|x-x_0|<\delta\}.$$

求证:

(1) φ 和 ψ 都是单调函数;

(2) 令 $\alpha=\lim\limits_{\delta\to 0+}\varphi(\delta)$, $\beta=\lim\limits_{\delta\to 0+}\psi(\delta)$,则

$$\alpha=\liminf_{x\to x_0}f(x),\beta=\limsup_{x\to x_0}f(x).$$

§2.12 混沌现象

自然界中的许多现象,是由严格的因果关系所支配的.例如:月亮的阴晴圆缺、四季的更迭、日食和月食的发生…….对于这一类完全由因果关系支配的系统进行一般研究,自然有着重大的意义.这一种完全由因果关系所制约的系统,通常叫做**决定性系统**.研究决定性系统的数学分支,称为**动力系统理论**.

决定性系统的基本特征是:在这个系统中,今日的种种现象,是昨日种种现象的必然结果;而明日种种现象,又以今日的种种状态为其原因.这就是说,从系统的初始状态出发,依据系统的因果规律,将确定系统的未来的一切.

用一个简单的例子来说,设函数 f 代表某种因果规律,f 的定义域中的一点 x 表示一种初始状态,那么由状态 x 到下一个状态 $f(x)$,就是由于规律 f 在起作用.如果 $f(x)$ 仍在 f 的定义域中,那么自然要考虑再下一个状态 $f\circ f(x)=f^2(x)$,如此继续下去,使得我们要来研究函数的迭代.

设 I 是任意一个区间,函数 $f:I\to I$.将 f 反复地复合,产生 $f^2(x)=f\circ f(x)$,$f^3(x)=f\circ f^2(x)=f\circ f\circ f(x)$,一般地,$f^n(x)=f\circ f^{n-1}(x)$,$n\geqslant 3$.此外,我们规定 $f^0(x)=x$,即 f^0 表示恒等映射,还有 $f^1(x)=f(x)$,$x\in I$.称 f^n 为 f 的**第 n 次迭代**.

在研究函数的迭代的时候,自然首先会想到把 f^n 的表达式通过 f 的表达式计算出来.遗憾的是,除了对很简单、很特殊的 f,第 n 次迭代 f^n 的解析表达式要么根本求不出来,要么即使求了出来,也因太复杂而没有什么实用价值.因此,寻找 f^n 的表达式不是研究函数迭代的正确方向.

对于任意固定的 $x\in I$,我们考虑序列

$$x,f(x),f^2(x),\cdots,f^n(x),\cdots.$$

如果自然数 m 使得 $f^m(x)=x$,称 m 是点 x 的一个**周期**,x 称为 f 的一个**周期点**.如果 m 是点 x 的一个**周期**,那么 m 的任何正整数倍一定也是 x 的周期,这是因为当 $k\in\mathbf{N}^*$ 时,

$$\begin{aligned}f^{km}(x)&=\underbrace{f^m\circ f^m\circ\cdots\circ f^m}_{k\text{个}}(x)\\&=\underbrace{f^m\circ\cdots\circ f^m}_{k-1\text{个}}(x)=\cdots=f^m(x)=x.\end{aligned}$$

如果 x 是 f 的一个周期点,那么 x 的一切周期中的最小者,称为 x 的**最小周期**.

设 $p\in\mathbf{N}^*$ 是点 x 最小周期，而 n 是 x 的大于 p 的周期，那么必有 $p\mid n$（即 p 整除 n）．这一事实证明如下．用反证法．若 $p\nmid n$，那么存在 $q,r\in\mathbf{N}^*$，使得 $n=pq+r$，其中 $0<r<p$．于是有

$$x=f^n(x)=f^{pq+r}(x)=f^r\circ f^{pq}(x)=f^r(x).$$

这表明，比 p 更小的正整数 r 也是点 x 的一个周期，这与 p 是 x 的最小周期的定义矛盾．

如果 x 的最小周期是 n，则称 x 是 f 的一个 n - 周期点，这时序列 $x,f(x),f^2(x),\cdots,f^n(x),\cdots$ 实际上是以下 n 个不同点构成的有限数列

$$x,f(x),f^2(x),\cdots,f^{n-1}(x)$$

这一模式的无限次的反复．这个有限数列叫做点 x 的 n - **周期轨**．

设 x 是 f 的 1 - 周期点，那就是说 $x=f(x)$．这说明 x 是 f 的一个不动点．反过来说，f 的不动点也是一个 1 - 周期点．1 - 周期点有十分明显的几何特征：它是函数 $y=f(x)$ 的图像与正方形 $I\times I$ 的对角线 $y=x$ 的交点的横坐标．再设 α 是 f 的 2 - 周期点，那么令 $\beta=f(\alpha)\neq\alpha$，此时有 $f(\beta)=f^2(\alpha)=\alpha$．这表明两点 (α,β) 与 (β,α) 同时在曲线 $y=f(x)$ 上．注意，因为 $\alpha\neq\beta$，这两点关于对角线 $y=x$ 是镜像对称的．这一事实提供了寻找 f 的 2 - 周期点的一个几何方法．

但是对于 3 - 周期点、4 - 周期点、……就没有这么简单的判别方法．

例 1　在区间 $[0,1]$ 上考察函数

$$f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2}, & \text{当 } x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\text{时;}\\[2ex] 2(1-x), & \text{当 } x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]\text{时.}\end{cases}$$

由图 2 - 7 可知，函数有 1 - 周期点（不动点）和 2 - 周期点．此外，由

$$f(0)=\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)=1,$$

$$f(1)=0,$$

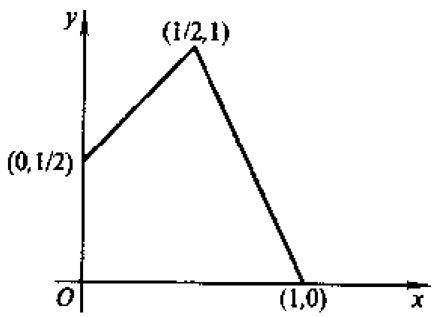

图 2 - 7

知 $f^3(0)=0$,所以 0 是 f 的一个 3 - 周期点,当然 $\frac{1}{2}$ 与 1 也是 f 的 3 - 周期点. □

但是,即使对于图 2 - 7 这样的最简单的图像,谁能看得出 f 还有 4 - 周期点、5 - 周期点、……? 1975 年,李天岩(Tien - Yien Li)与 J. A. Yorke 在《美国数学月刊》上发表了一篇题为《周期 3 蕴涵混沌》(*Period Three Implies Chaos*)的论文,揭示了下列惊人的事实:

定理 2.29 设 $f:I\to I$ 的连续函数,若 f 有 3 - 周期点,那么,对于任何 $n\in\mathbf{N}^*$,f 有 n - 周期点.

定理的证明并不复杂,但是,为了方便读者,我们把证明分解成三个简单的引理.

引理 2.1 设 $f:I\to I$ 连续,并且 $J=[a,b]\subset I$. 如果 $f(J)\supset J$,那么 f 在 J 上有一个不动点.

证明 由于 $f(J)\supset J$,可以找到 $c,d\in J$,使得 $f(c)=a$ 以及 $f(d)=b$. 若 $c=a$ 或 $d=b$,那么点 a 或 b 就是 f 的不动点. 如果不是这样,这说明 $c>a$ 且 $d<b$. 这时,连续函数 $\varphi(x)=f(x)-x$ 适合 $\varphi(c)=f(c)-c=a-c<0$ 而 $\varphi(d)=f(d)-d=b-d>0$,因此由零值定理,φ 在 c 与 d 之间必有一零点,这一点正是 f 的不动点. □

引理 2.2 设 $f:I\to I$ 连续,J_1,J_2 是 I 的两个闭子区间. 如果 $f(J_1)\supset J_2$,那么必存在闭子区间 K,使得 $f(K)=J_2$.

证明 设 $J_1=[a,b]$,$J_2=[U,V]$,由于 $f(J_1)\supset J_2$,必存在 $u,v\in[a,b]$,使得 $f(u)=U$,$f(v)=V$. 不妨设 $u<v$($v<u$ 的情形可同法处理),命

$$E=\{s:f(s)=U,u\leqslant s<v\}.$$

因为 $f(u)=U$,故 E 非空集且有上界,因而必有上确界,记 $u^*=\sup E$. 我们证明 $u^*\in E$,即要证明 $f(u^*)=U$. 由上确界的定义知道,对任意正整数 n,必有 $s_n\in E$,使得

$$u^*-\frac{1}{n}<s_n\leqslant u^*,$$

由此立得 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=u^*$. 由于 $s_n\in E$,故 $f(s_n)=U$,让 $n\to\infty$ 并利用 f 的连续性即得 $f(u^*)=U$,这就证明了 $u^*\in E$,而且 $u^*\neq v$(因为 $f(v)=V$). 有了 u^* 之后,可以定义

$$F=\{t:f(t)=V,u^*<t\leqslant v\},$$

F 当然有下确界,记 $v^*=\inf F$. 和上面一样可证 $f(v^*)=V$. 由此可知 $u^*\neq v^*$. 记 $K=[u^*,v^*]$,那么对任意 $x\in(u^*,v^*)$,由于 $x>u^*$,必有 $f(x)\neq U$,又因 $x<v^*$,所以 $f(x)\neq V$.

由于 $f(u^*)=U, f(v^*)=V$，故由介值定理，对于任意 $\eta\in(U,V)$，必有 $\xi\in[u^*,v^*]$，使得 $f(\xi)=\eta$. 这就证明了：

$$f([u^*,v^*])\supset[U,V]. \tag{1}$$

为了证明 $f([u^*,v^*])\subset[U,V]$，必须证明对于任意的 $x<U$（或 $x>V$），不可能存在 $s\in[u^*,v^*]$，使得 $f(s)=x$. 如果有这样的 x，我们再取一点 $x'\in(U,V)$，根据(1)，存在 $s'\in[u^*,v^*]$，使得 $f(s')=x'$，那么由于 $f(s)=x$，而且 $x<U<x'$，由介值定理必有 ξ 介于 s 与 s' 之间，使得 $f(\xi)=U$，由于 $\xi>u^*$，这是不可能的. 这就证明了

$$f([u^*,v^*])\subset[U,V]. \tag{2}$$

综合(1)与(2)，即知 $f(K)=[U,V]$. □

引理 2.3　设 $J_0,J_1,\cdots,J_{n-1}$ 都是 I 的闭子区间，并且 $f(J_j)\supset J_{j+1}$，$j=0,1,2,\cdots,n-2$. 此外，还有 $f(J_{n-1})\supset J_0$. 那么，至少有一点 $x_0\in J_0$，使得 $f^n(x_0)=x_0$，并且 $f^j(x_0)\in J_j$，对 $j=1,2,\cdots,n-1$ 成立.

用一句通俗的话说，当 j 从 0 跑过 $1,2,\cdots,n-1$ 时，$f^j(x_0)$ 依次地拜访 $J_0,J_1,\cdots,J_{n-1}$，最后仍然回到 x_0.

证明　因为 $f(J_{n-1})\supset J_0$，由引理 2.2 知有一个闭子区间 $K_{n-1}\subset J_{n-1}$，使得 $f(K_{n-1})=J_0$. 类似地，从 $f(J_{n-2})\supset J_{n-1}\supset K_{n-1}$ 又可以找到一个闭子区间 $K_{n-2}\subset J_{n-2}$，使得 $f(K_{n-2})=K_{n-1}$. 仿此继续前进，可以找到一个闭子区间 $K_1\subset J_1$，使得 $f(K_1)=K_2$. 最后，存在 J_0 的闭子区间 K_0，使得 $f(K_0)=K_1$. 所以，我们看到

$$\begin{aligned}
&f(K_0)=K_1,\\
&f^2(K_0)=K_2,\\
&f^3(K_0)=K_3,\\
&\cdots\cdots,\\
&f^{n-1}(K_0)=K_{n-1},\\
&f^n(K_0)=f(K_{n-1})=J_0\supset K_0,
\end{aligned}$$

对函数 f^n 运用引理 2.1，我们可以找到一点 $x_0\in K_0\subset J_0$，使得 $f^n(x_0)=x_0$. 很显然，我们有 $f^k(x_0)\in K_k\subset J_k$，这里 $k=1,2,\cdots,n-1$. □

现在可以来证明定理 2.29.

根据假定，设 η 是 f 的一个 3 周期点，那么 $\eta, f(\eta), f^2(\eta)$ 构成 η 的 3-周期轨. 不妨设

$$\eta<f(\eta)<f^2(\eta).$$

为简单起见，设 $\alpha=\eta, \beta=f(\eta), \gamma=f^2(\eta)$，于是有

$$f(\alpha)=\beta, f(\beta)=\gamma, f(\gamma)=\alpha.$$

记 $J=[\alpha,\beta]$, $K=[\beta,\gamma]$. 由于 $f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\gamma$,故由介值定理知道,

$$f(J)\supset K. \tag{3}$$

又因 $f(\beta)=\gamma$, $f(\gamma)=\alpha$,仍由介值定理,

$$f(K)\supset[d,\gamma]=J\cup K. \tag{4}$$

现在来证明,对于任意 $n\in N$, f 必有 n - 周期点. 当 $n=1$ 时,由(4)知 $f(K)\supset K$,故由引理 2.1, f 在 K 上有一个不动点,此即 1 - 周期点. 再设 $n=2$,由(4)知 $f(K)\supset J$,由(3)和 $f(J)\supset K$. 于是由引理 2.3,存在一点 $x_0\in K$,使得 $f^2(x_0)=x_0$,且 $f(x_0)\in J$. 我们证明 2 是 x_0 的最小周期. 因若 $f(x_0)=x_0$,那么 $x_0\in J\cap K=\{\beta\}$,即 $x_0=\beta$,这就导致

$$f(x_0)=f(\beta)=\gamma>\beta=x_0$$

的矛值. 现设 $n>3$,记

$$I_0=I_1=\cdots=I_{n-2}=K, I_{n-1}=J.$$

从(4)知道 $f(I_j)\supset I_{j+1}$, $j=0,1,\cdots,n-2$,又从(3)有 $f(I_{n-1})\supset I_0$,即引理 2.3 的要求都满足,因此有一点 $x_0\in I_0=K$,使得 $f^n(x_0)=x_0$,且

$$f^j(x_0)\in I_j, j=1,\cdots,n-1 \tag{5}$$

现在证明 n 是 x_0 的最小周期. 不然的话,存在 $k<n$,使得 $f^k(x_0)=x_0$,于是 $x_0, f(x_0),\cdots,f^{k-1}(x_0)$ 构成 x_0 的 k - 周期轨. 由于 $n-1>n-2\geqslant k-1$,故 $f^{n-1}(x_0)$ 必是

$$x_0, f(x_0),\cdots,f^{n-2}(x_0)$$

中的一个,由(5)知,它们都在 K 中. 但是 $f^{n-1}(x_0)\in I_{n-1}=J$,这说明 $f^{n-1}(x_0)\in K\cap J=\{\beta\}$,因此 $x_0=f^n(x_0)=f(\beta)=\gamma$,而

$$\alpha=f(\gamma)=f(x_0)\in I_1=K=[\beta,\gamma].$$

这不可能. 这样就完全证明了定理 2.29. □

根据定理 2.29,我们可以断言,图 2-7 所表示的函数 f 对于一切 $n\in \mathbf{N}^*$ 有 n - 周期点.

例 2 考察由图 2-8 所表示的分段线性函数 $f:[0,4]\to[0,4]$. 由于

$f(0)=2, f(2)=3,$

$f(3)=1,$

$f(1)=4, f(4)=0,$

因此 0,1,2,3,4 都是 5 - 周期点. 我们来证明 f 没有 3 - 周期点. 由图 2.8 看出,

$f([0,1])=[2,4],$

$f^2([0,1])=f([2,4])=[0,3],$

$f^3([0,1])=f([0,3])=[1,4],$

类似地,

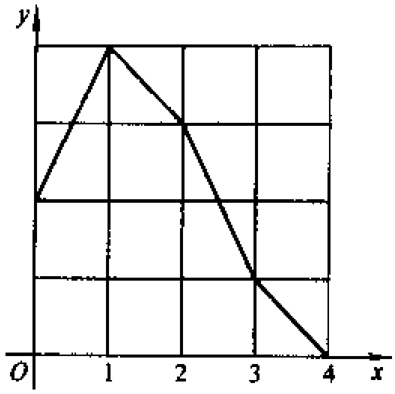

图 2－8

$$f^3([1,2])=[2,4],f^3([3,4])=[0,3].$$

由此得知，在区间$[0,1]$，$[1,2]$与$[3,4]$中，f^3 没有不动点.

因为 $f^3([2,3])=[0,4]\supset[2,3]$，故 f^3 在$[2,3]$中至少有一个不动点. 我们说，这个不动点是惟一的. 事实上，$f:[2,3]\to[1,3]$是严格递减的函数，$f:[1,3]\to[1,4]$与 $f:[1,4]\to[0,4]$也是严格递减的函数. 这就说明，f^3 在$[2,3]$上是严格递减的函数，所以 f^3 在$[2,3]$上的不动点(记作 x_0)是惟一的. 由图 2－8 看出，函数 f 有惟一的不动点，记作 x_1. 由于 $f^3(x_1)=x_1$，由 f^3 的不动点的惟一性，所以 $x_0=x_1$. 这说明 x_0 是 f 的不动点，而不是 f 的 3－周期点. □

这是一个十分美妙和惊人的结果. 在李天岩与 Yorke 的论文公开发表之后不久，就有人指出，这一结果只不过是乌克兰数学家 A. N. Sharkovskii 的一个定理的特殊情况. 这个定理于 1964 年用俄文发表. Sharkovskii 全面地研究了怎样的周期会蕴涵另外的周期. 这里介绍他所得到的结论. 任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都可被惟一地表成 $n=2^s(2p+1)$，这里 s 与 p 是非负整数. 很明白，$s=0$ 当且只当 n 是奇数，而 $p=0$ 意味着 n 是 2 的非负方幂. Sharkovskii 将正整数按下列方式排序

$$\begin{array}{ccccc}
3\prec & 5\prec & \prec 7\prec & 9\prec & \cdots \\
2\cdot3\prec & 2\cdot5\prec & 2\cdot7\prec & 2\cdot9\prec & \cdots \\
2^2\cdot3\prec & 2^2\cdot5\prec & 2^2\cdot7\prec & 2^2\cdot9\prec & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\end{array}$$
$$\cdots\cdots\prec 2^5\prec 2^4\prec 2^3\prec 2^2\prec 2\prec 1,$$

并且证明了

定理 2.30　设 $f:I\to I$ 连续且具有 m－周期点. 若上述排序中，m 先于 $n\in\mathbf{N}^*$，那么 f 必具有 n－周期点.

定理的证明在被人们简化之后，虽然在所涉及的知识上与定理 2.29 的证明属于同一水平，但由于相当繁琐，这里只能略去.

容易看出，李与 Yorke 的定理只是 Sharkovskii 定理的一个特殊情况. 对于例 2 中的函数来说，除了 3 是例外，它有以其他一切正整数为周期的周期点. 若函数 f 有 100 – 周期点，那么它必有 108 – 周期点、116 – 周期点和 124 – 周期点. 这是因为 $100=2^2\cdot 25$，而 $108=2^2\cdot 27$，$116=2^2\cdot 29$ 以及 $124=2^2\cdot 31$.

虽然 Sharkovskii 定理的内容比李与 Yorke 的定理的内容要广泛和深刻，而且先发表 10 年，但是李与 Yorke 的论文仍有其自身的价值. 李与 Yorke 的论文的重要意义在于，他们第一次提出了"混沌现象"的严格数学定义.

定义 2.23 设 f 是区间 I 到自身的连续映射，如果满足下列条件：

1° f 的周期点的最小周期没有上界；

2° 存在 I 的不可数子集 S，满足：

(i) 对于任何 $x,y\in S$ 且 $x\neq y$，有

$$\lim_{n\to\infty}\sup|f^n(x)-f^n(y)|>0;$$

(ii) 对于任何 $x,y\in S$，有

$$\lim_{n\to\infty}\inf|f^n(x)-f^n(y)|=0,$$

这时，称 f 描述的系统为**混沌系统**.

李与 Yorke 还证明了：如果 f 有 3 – 周期点，那么 f 是混沌的，即 f 所描述的系统是一个混沌系统.

定义 2.23 中的 2°鲜明地刻画了"混沌"的数学含义. 对于集合 S 中任何初始值 $x_0\neq y_0$，考虑各自的迭代序列

$$x_0, f(x_0), f^2(x_0), \cdots, f^n(x_0), \cdots$$
$$y_0, f(y_0), f^2(y_0), \cdots, f^n(y_0), \cdots$$

2°中的(i)与(ii)说明：在数列 $\{|f^n(x_0)-f^n(y_0)|: n\in\mathbf{N}^*\}$ 中，必可找到一个子列，它的极限是一个正数，又一定存在一个子列收敛于 0. 这意味着系统在迭代(或称演化)过程中，两条轨道中对应项的距离既可以无限次地接近 0，又可以无限次地超过一个正的常数. 在同一系统中，从两个初始点引出的两条轨道时而无限靠近，时而相互远离，忽分忽合，而且这种现象无限次地反复出现. 这表明系统的长期行为没有规律，飘忽不定，类似于一种随机现象. 由于能导致这种随机行为的初始值来自一个不可数集 S，所以这种不规则行为成了不可忽视的现象.

混沌现象可能出现于物理、化学、生物以及社会科学等许多领域所遇到的数学问题中，因而引起了科学家们的广泛兴趣.

通过学习这一节内容，我们还可以得到方法论的某种启示. 在古典的微积分中，本来已经有很多地方讨论过函数的迭代，但是，那时候人们关心的是计算迭代的极限 $\lim_{n\to\infty}f^n(x)$，一旦确定这个极限不存在时，就将它搁置在一边，不予理睬. 而正是在这个极限不存在的时候，再来研究序列 $\{f^n(x)\}$ 的变化，才能发现

这个序列会显示出各种各样的复杂变化,因此才有 Sharkovskii 定理,李与 Yorke 的定理.

练习题 2.12

1. 设 x 是 f 的一个 n－周期点. 记 $x_0=x, x_k=f^k(x), k=1,2,\cdots,n-1$. 证明: x 的 n－周期轨 $\{x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}\}$ 中各点两两不同,且都是 f 的 n－周期点.
2. 设 $f:[a,b]\to[a,b]$ 连续,如果 f 有 4－周期点,求证: f 必有 2－周期点.
3. 设 $f:[a,b]\to[a,b]$ 连续,若对某个正整数 n, f 有 2^n－周期点,求证 f 必有 2－周期点, 2^2－周期点, $\cdots$, 2^{n-1}－周期点.
4. 设 $I_0,I_1,\cdots,I_n$ 是 I 的闭子区间, f 在 I 上连续且适合 $f(I_i)\supset I_{i+1}$ 对 $i=0,1,\cdots,n-1$ 成立,求证:存在一点 $x\in I_0$ 使得 $f^i(x)\in I_i$, 这里 $i=1,2,\cdots,n$.

第3章　函数的导数

世间万物都是在不断变化的，从数量的方面反映这种变化的就是函数.在第二章里，我们研究过函数的变化趋势，那就是函数的极限及其有关的性质.但是，仅仅了解函数的变化是远不能满足科学和日常生活的需要的.更重要的是要研究函数对于自变量变化的快慢.例如说："一千克牛奶的价格上涨了1元"这一句话是十分笼统的，并没有告诉人们多少信息.但是，"一千克牛奶的价格在5年之中上涨了1元"与"一千克的牛奶在1个月之内上涨了1元"这样两句话在人们心中就会引起不同的反应：头一句话可能不会引起人们的注意，但是第二句话很可能造成消费者心理上的混乱.汽车、火车、飞机的速度是它们工作效率的重要标志；一条公路如果在一段很短的距离之内，它的海拔的高度有相当大的上升、下降，那么司机在这一段路上驾驶时必须全神贯注.变化的速度，也称为"变化率"，它的原始含义每个人都是很清楚的，通常指的是在一定的变化过程中"改变量的平均值".但是，为了解决科学技术、生产、生活中的实际问题，有必要对它作出完全精确的数学描述.在历史上，正是实际问题对这种"精确描述"的急切需要，促使"微分学"的产生，而"微分学"正是数学分析的一个重要的组成部分.在§3.1中，我们用来自三个不同领域中的例子来说明"变化率"的概念，并由此抽象出"导数"的定义.

§3.1　导数的定义

我们的第一个例子来自质点的运动学.

例1　非匀速直线运动的瞬时速度

设一质点做非匀速运动，它所走过的路程与时间的关系为 $s=s(t)$，我们考虑质点在时刻 t 的**瞬时速度**.为此，考虑从时间 t 到 $t+\Delta t$ 这一段时间区间，这里 Δt 可以是正值，也可以是负值.在这一段时间内，质点走过的路程为

$$\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t).$$

当 $|\Delta t|$ 很小的时候，我们认为运动近似地是匀速的，因此这一段时间的平均速度是

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}.$$

如果这时我们把 Δt 固定下来，那么上述平均速度只能是在时刻 t 质点速度的一个近似值，只有当我们令 $\Delta t\to 0$ 时，上述比值的极限才可以作为质点在时刻 t 的瞬时速度的合理定义.因此，如果极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

存在且有限时，我们称这个数值为质点在时刻 t 的瞬时速度. □

例 2 非均匀棒的线密度

在物理上，形状接近于直线的细长物体称为棒.棒的横断面很小而且在任何部分都是一样的.在棒的各处分布着质量.设想从棒的左端 A 开始，到 x 点处质量为 $m(x)$，我们来计算在棒的各点上的密度（称为线密度）.考察邻近的一点 $x+\Delta x$，在两点 x 与 $x+\Delta x$ 之间，质量的增量是 $\Delta m=m(x+\Delta x)-m(x)$.那么平均线密度则是比值

图 3-1

$$\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}.$$

只有当 $\Delta x\to 0$ 时，上述比值才能准确地表示在点 x 附近物质密度的情况.因此，我们定义

$$\rho(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}$$

为棒在点 x 处的线密度，这时自然要假设上式右边的极限存在且有限. □

例 3 曲线的切线

在中学里，我们只会作圆的切线，那完全是用几何的方法作出的.设 A 是圆周上的一点，那么这个圆在 A 点的切线就是过 A 点且与过 A 点的半径垂直的直线.在中学物理中还知道，质点做匀速圆周运动时，在各点处的速度就是指向过该点的切线的方向.对其他各种曲线，我们并未定义过“切线”的概念.为了研究曲线运动，确实需要对一般的曲线的切线作出定义并指明如何计算切线.在历史上，切线的计算也是推动微分学的发生和发展的一个动力.

当前，我们只讨论一类比较简单的曲线，即**显式曲线**，也就是说，这种曲线是函数 f 的图像.

在曲线 $y=f(x)$ 上，任意地固定一点 $P_0=(x_0,y_0)$，其中 $y_0=f(x_0)$；再取曲线上与 P_0 邻近的一点 $P=(x,f(x))$.连结两点 P_0 与 P 作曲线的一条“割线”（见图 3-2），这条割线的斜率是

$$\tan\theta=\frac{QP}{P_0Q},$$

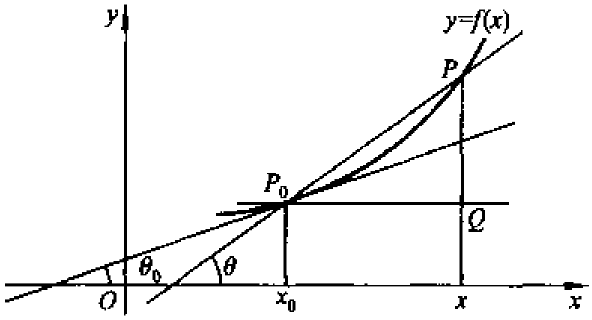

图 3-2

其中点 Q 是过 P_0 所作的平行于横轴的直线与过 P 所作的平行于纵轴的直线的交点；θ 表示这条割线与横轴的正向所夹成的角. 将点的坐标代入，得到

$$\tan\theta=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

当点 P 沿着曲线向点 P_0 移动时，割线 P_0P 绕着 P_0 转动，角 θ 也随着变化，如果当 $x\to x_0$ 时 $\tan\theta$ 有有限的极限

$$\lambda=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

我们有理由把经过点 P_0 以 λ 为斜率的直线称作曲线在点 P_0 的切线. 若把这切线与横轴正向的夹角记为 θ_0，自然应当有 $\lambda=\tan\theta_0$. 这时曲线在 P_0 处的切线方程可以通过"点斜式"立即写出

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\lambda,$$

也就是

$$y=y_0+\lambda(x-x_0),$$

这里 (x,y) 是在切线上变动的点. □

这三个问题来自三个完全不同的领域，但是，在解决它们的时候，都涉及计算一类有着共同类型的极限. 共同之处在于：都是考虑"函数的改变量与相应的自变量的改变量之比当自变量的改变量趋于 0 时的极限"，这正是函数在一点的"变化率". 如果有好几个实例能导致同一类型的极限，数学家通常采用的办法是：撇开这些实例所包含的具体内容，以免这些内容搅乱了我们的注意力，而只将其中的数学本质抽象出来作更进一步的研究. 在本书以后的部分，大家还将不断看到这种处理手法.

定义 3.1 设函数 f 在一点 x 的近旁有定义，如果极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

存在并且有限，称这个极限值为 f 在点 x 的**导数**，记作 $f'(x)$，并称函数 f 在点 x **可导**.

有了这个定义之后，再回头看那三个例子. 对非匀速直线运动来说，到时刻 t 所走过的路程 $s(t)$ 的导数 $s'(t)$ 是运动着的质点在时刻 t 的瞬时速度. 对例 2 来说，线密度 $\rho(x)=m'(x)$，这里 $m(x)$ 表示非均匀棒从 A 到 x 这一段的质量. 例 3 是一个几何问题，曲线 $y=f(x)$ 上一点处切线的斜率，正好是函数 f 的导数 $f'(x)$. 曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的方程是：

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

下面我们引入单边导数的概念.

定义 3.2　设函数 f 在点 x 的右边 $[x,x+r)$ 有定义，若极限

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

存在且有限，则称此极限为 f 在点 x 处的**右导数**，记作 $f'_+(x)$. 类似地定义 f 在点 x 处的**左导数** $f'_-(x)$. 显然，函数 f 在点 x 处可导的一个必要充分条件是：在点 x 处的左、右导数存在并且相等，这时 $f'(x)=f'_-(x)=f'_+(x)$.

关于在一点处可导与在该点处连续的关系，有下列的定理：

定理 3.1　若函数 f 在点 x_0 处可导，则 f 必在 x_0 处连续.

证明　记 f 在 x_0 处的导数为 $f'(x_0)$，于是我们由

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\\&=f'(x_0)\cdot 0=0,\end{aligned}$$

可知

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

这说明 f 在点 x_0 处连续.　□

但是，函数在一点处的连续性却无法保证该函数在这一点处可导，下面给出的简单例子说明：连续函数可以在一点乃至无穷多个点上没有导数.

例 4　设 $f(x)=|x|$，证明函数 f 在 $x=0$ 处不可导.

证明　因为

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h}{h}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1.$$

可见 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$，从而在 $x=0$ 处不可导，见图 3－3. 这个图对我们有明显

的启示.在坐标原点处,曲线的“右割线”就是直线 $y=x$,并不随着 $h\to0+$ 而变化.而“左割线”是直线 $y=-x$,也不随着 $h\to0-$ 而变化.所以在这个点上,曲线没有切线. □

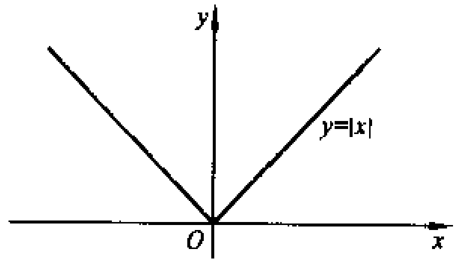

图 3-3

这个例子的有趣之处还在于:它提供了一个实例,说明一条连续的曲线可以在一点处没有切线.事实上,我们可以造出一条连续曲线,它在可数个点处没有切线.这种曲线是很容易造出的.在区间$[-1,1]$上考虑函数$|x|$,接着将它以周期2向左、右两边反复地拓展,得出一个定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数,它的图像是图3-4.很明显,在 x 为整数的地方,曲线没有切线.更令人惊奇的是,把可数个这种锯齿形函数“迭加”起来,竟可以制造一条“处处都没有切线的连续曲线”.这个事实叫人不可思议.的确,在历史上曾有一段相当长的时间,人们怎么也想象不出一条连续的曲线竟然到处都没有切线!但是,由于知识的局限,我们还不能在这里作出这个反例,这个任务留待本书的第10章来完成.

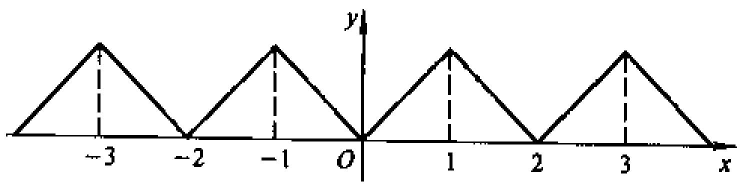

图 3-4

定义 3.3 如果函数 f 在开区间(a,b)中的每一点可导,则称 f 在(a,b)上**可导**;如果 f 在(a,b)上可导,并且在点 a 处有右导数,在点 b 处有左导数,则说 f 在闭区间$[a,b]$上**可导**.

类似地,可以定义 f 在$[a,b)$与$(a,b]$上**可导**.

以后,我们将常常研究在一个区间(a,b)上全体可导函数所成的集合.由定理3.1可知,这是区间(a,b)上全体连续函数组成的集合的一个子集.有理由希望,对可导函数的研究,可以得出许多更具体、更生动的结论.

练习题 3.1

1. 设函数 f 在 $x=0$ 可导且 $f(0)=0$,求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}.$$

2. 设 f 在 $x=0$ 可导,$a_n\to 0-$ 而 $b_n\to 0+\ (n\to\infty)$,证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(0).$$

3. 设 f 是一偶函数且在 $x=0$ 可导,证明 $f'(0)=0$.

4. 设函数 f 在 x_0 可导,则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0).$$

举例说明:即使上式左边的极限存在且有限,f 在 x_0 也未必可导.

5. 在抛物线 $y=x^2$ 上哪一些点的切线

(1) 平行于直线 $y=4x-5$;

(2) 垂直于直线 $2x-6y+5=0$;

(3) 与直线 $3x-y+1=0$ 交成 45° 的角?

6. 证明:抛物线 $y=x^2$ 上的两点 (x_1,x_1^2) 和 (x_2,x_2^2) 处的切线互相垂直的必要充分条件是 x_1 和 x_2 适合关系 $4x_1x_2+1=0$.

7. 设函数 f 在 $x=a$ 可导,且 $f(a)\neq 0$,求数列极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+1/n)}{f(a)}\right)^n.$$

8. 设函数 φ 在点 a 处连续,又在 a 的近旁有 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$ 和 $g(x)=|x-a|\varphi(x)$. 证明:f 在点 a 处可导,并求出 $f'(a)$. 问在什么条件下 g 在点 a 处可导?

9. 设 $f(x)=x(x-1)^2(x-2)^3$,求 $f'(0)$,$f'(1)$ 和 $f'(2)$.

10. 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=0 \text{ 时};\\ x^\lambda\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时}.\end{cases}$$

求证:当 $\lambda>1$ 时 $f'(0)$ 存在;而 $\lambda\leqslant 1$ 时 f 在 $x=0$ 处不可导.

问题 3.1

1. 证明 Riemann 函数 $R(x)$处处不可导.

2. 试构造一函数 f,它在$(-\infty,+\infty)$中处处不可导,但$\lim\limits_{n\to\infty} n\left|f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right|$处处存在.

---

§3.2 导数的计算

我们首先从导数的定义 3.1 出发,来计算一些最简单的函数的导数.

例 1 设 $f=c$ 为常值函数,求证 $f'=0$.

证明 由于

$$f(x+h)-f(x)=c-c=0$$

对一切实数 x 与 h 成立,由定义 3.1 可知 $f'(x)=0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 成立,即 $f'=0$. 常值函数的变化率为 0,这是当然的事. □

例 2 计算 $f(x)=x^n$ 的导数,这里 $n\in\mathbf{N}^*$.

解 任意取定 $x_0\in\mathbf{R}$. 由因式分解,知

$$\begin{aligned}f(x)-f(x_0)&=x^n-x_0^n\\&=(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+xx_0^{n-2}+x_0^{n-1}).\end{aligned}$$

从此得到

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\sum_{i=0}^{n-1}x_0^i x^{n-1-i}.$$

令 $x\to x_0$ 取极限,得到

$$\begin{aligned}f'(x_0)&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\sum_{i=0}^{n-1}x_0^i x^{n-1-i}\\&=\sum_{i=0}^{n-1}x_0^{n-1}=nx_0^{n-1}.\end{aligned}$$

这说明:对任何 $x\in\mathbf{R}$ 有$(x^n)'=nx^{n-1}$. □

例 3 求正弦函数的导数.

解 令 $f(x)=\sin x$,于是

$$f(x+h)-f(x)=\sin(x+h)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}.$$

由此得

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x.$$

这表明$(\sin x)'=\cos x$对一切$x\in\mathbf{R}$成立. □

例 4 求证$(\cos x)'=-\sin x$对$x\in\mathbf{R}$成立.

建议读者仿上例来证明. □

例 5 设a为大于0的常数,求函数$f(x)=\log_a x$的导数.

解 由

$$f(x+h)-f(x)=\log_a(x+h)-\log_a x$$

$$=\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)=\frac{h}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}$$

可得

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}$$

令$h\to 0$并取极限,得

$$f'(x)=\frac{1}{x}\log_a\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\right)=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}.$$

这就是说,

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\frac{1}{x\ln a},x>0. \quad \square$$

特别地,当$a=\mathrm{e}$时,由上式得出

$$(\ln x)'=\frac{1}{x},x>0.$$

这时公式得到了显著的简化,这就说明了为什么在高等数学中,人们常常乐于用e作底来取对数.我们已经说过,用e作底的对数叫做**自然对数**.

计算函数的导数通常称为"**求导**".在以上几个例子中,是从导数的定义出发来求导的.如果每一次求导都从定义开始,那不但十分麻烦,有时甚至相当困难.我们希望发现一些求导所遵守的法则,利用它们可以从已知的导数顺利地求出其他一大批函数的导数.

定理 3.2(求导的四则运算) 设函数f和g在一点x可导,则$f\pm g$,fg也

在点 x 处可导;如果 $g(x)\neq 0$,那么函数$\dfrac{f}{g}$也在点 x 处可导.精确地说,我们有以下公式:

1° $(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$;

2° $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;

3° $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

证明 1° 由于

$$\frac{(f\pm g)(x+h)-(f\pm g)(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\pm\frac{g(x+h)-g(x)}{h},$$

依条件 f 与 g 均在点 x 可导,令 $h\to 0$,便得出 1°中的公式.

2° 因为

$$\frac{fg(x+h)-fg(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h},$$

由 f 与 g 在点 x 处可导的条件以及所蕴含的 f 和 g 在点 x 连续的事实,在上式双方令 $h\to 0$,便得出 2°中的公式.

3° 利用等式

$$\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$

以及 f 在点 x 可导,g 在点 x 连续、可导,在上式双方令 $h\to 0$,便得出 3°中的公式. □

如果 c 为常数且 f 在点 x 处可导,利用定理 3.2 中的性质 2°及例 1,我们有

$$(cf)'(x)=(c)'f(x)+cf'(x)=0+cf'(x),$$

即

$$(cf)'(x)=cf'(x).$$

这表明:任何常数因子都可以提到求导符号的外边来.

例 6 计算正切函数和余切函数的导数.

解 利用定理 3.2 中的 3°,我们有

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

即

$$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

类似地，可证

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad \square$$

对复合函数求导，有以下的“链式法则”.

定理 3.3(链式法则) 设函数 φ 在点 t 处可导，函数 f 在点 $x=\varphi(t)$ 处可导，那么复合函数 $f\circ\varphi$ 在点 t 处可导，并且

$$(f\circ\varphi)'(t) = f'\circ\varphi(t)\varphi'(t).$$

证明 考察

$$\frac{f\circ\varphi(t+h)-f\circ\varphi(t)}{h} = \frac{f\circ\varphi(t+h)-f\circ\varphi(t)}{\varphi(t+h)-\varphi(t)}\cdot\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}. \tag{1}$$

以上的变形只要当 $\varphi(t+h)\neq\varphi(t)$ 时才有意义. 但是，如果我们规定当 $\varphi(t+h)=\varphi(t)$ 时，(1)式右边的第一个分式为 $f'\circ\varphi(t)$，(1)式照样成立(双方都等于0). 于是(1)式就时时刻刻有意义了. 在(1)式的等号两边令 $h\to 0$，由于 φ 在点 t 处可导从而在这一点也连续，所以

$$\varphi(t+h)-\varphi(t)\to 0(h\to 0).$$

从(1)式取极限，得出

$$(f\circ\varphi)'(t) = f'\circ\varphi(t)\varphi'(t). \quad \square$$

链式法则是一个很有用处的公式，利用它可以容易地计算出许许多多比较复杂的函数的导数.

例 7 设 $y=\cos(x^2+5x+2)$，求 y'.

解 引入“中间变量”$u=\varphi(x)=x^2+5x+2$，就有 $y=f(u)=\cos u$，于是 $y=f\circ\varphi(x)$. 由链式法则，得到

$$y' = f'\circ\varphi(x)\varphi'(x) = -(2x+5)\sin(x^2+5x+2). \quad \square$$

可以把上述链式法则推广到由3个或更多的环节组成的复合函数. 比如说，如果

$$y=f(u),\ u=\varphi(x),\ v=\psi(x),$$

即

$$y=f\circ\varphi\circ\psi(x),$$

则 y 关于自变量 x 的导数是

$$y'=(f\circ\varphi\circ\psi)'(x)=f'(u)\varphi'(v)\psi'(x),$$

其中 $v=\psi(x)$，$u=\varphi\circ\psi(x)$. 即

$$(f\circ\varphi\circ\psi)'(x) = f'\circ\varphi\circ\psi(x)\varphi'\circ\psi(x)\psi'(x).$$

在具体操作的时候，只需像“剥洋葱”那样，一层一层地把皮剥下，无需再设

置一些中间变量，只要做到"胸中有数"，便能实现求导．请看

例 8 设 $y=\sin\left(\ln\dfrac{x}{1+x^2}\right),x>0$，求 y'.

解 将链式法则记在心中，我们有

$$\begin{aligned}y'&=\cos\left(\ln\frac{x}{1+x^2}\right)\left(\ln\frac{x}{1+x^2}\right)'\\&=\cos\left(\ln\frac{x}{1+x^2}\right)\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{-1}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'\\&=\frac{1+x^2}{x}\cdot\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\cdot\cos\left(\ln\frac{x}{1+x^2}\right)\\&=\frac{1-x^2}{x(1+x^2)}\cos\left(\ln\frac{x}{1+x^2}\right).\quad\square\end{aligned}$$

定理 3.4(反函数的求导) 设 $y=f(x)$ 在包含 x_0 的区间 I 上连续且严格单调，如果它在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)\neq0$，那么它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 处可导，并且

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)},$$

证明 由于

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)^{-1},$$

由定理 2.19 知道，f^{-1} 在 y_0 也连续，从而当 $y\to y_0$ 时蕴涵 $x\to x_0$；在上式双方令 $y\to y_0$ 立即得出

$$(f^{-1})'(y_0)=(f'(x_0))^{-1}.\quad\square$$

在 §3.1 的例 3 中，我们把计算曲线的切线的问题，作为引入导数概念的推动力之一．但是，把这个例子看成"导数的几何解释"也有着同样的重要性．那就是说，函数 f 的导数 $f'(x_0)$，可以看成平面曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率．从几何的角度来理解导数的意义，对我们研究问题大有好处．几何图形上的启示往往起着重要的作用．

例如说，定理 3.4 是不难从图形上"读"出来的．我们说过，在同一个直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 的图形与函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是同一条曲线(见图 3-5)，设这条曲线在点 (x_0,y_0) 处有确定的切线，设这条切线同 x 轴的正向、y 轴的正向所夹的角分别为 α,β．容易看出，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$，由此得到

$$\tan\alpha=\frac{1}{\tan\beta},$$

即 $f'(x_0)=\dfrac{1}{(f^{-1})'(y_0)}$，正是定理 3.4 的结论．

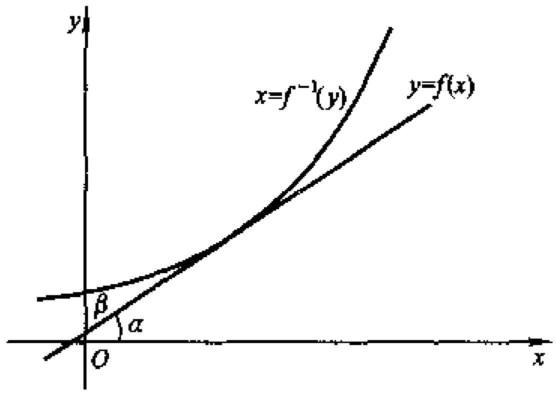

图 3-5

例 9(指数函数的导数) 设 $a>0$,求证 $(a^x)'=a^x\ln a$.

证明 设 $y=a^x$,那么 $x=\log_a y$. 由例 5 知 x 对 y 的导数是 $\frac{1}{y\ln a}$. 利用定理 3.4 便得

$$(a^x)'=\left(\frac{1}{y\ln a}\right)^{-1}=y\ln a=a^x\ln a. \quad \square$$

作为特例,我们有 $(e^x)'=e^x$. 这就是说,指数函数 e^x 在求导之下仍变为自身. 据此,我们说 e^x 是求导运算的一个"不动点". 从这个意义上来说,e^x 是最简单的指数函数.

例 10 计算下列反三角函数的导数:

1° $f(x)=\arcsin x$; 2° $f(x)=\arctan x$.

解 1° 令 $y=\arcsin x$,那么 $x=\sin y$. 将函数 $\sin y$ 对 y 求导,得到 $\cos y$. 由定理 3.4,我们有

$$f'(x)=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}.$$

这里的根式必须取正号,因为当 $|y|<\frac{\pi}{2}$ 时 $\cos y>0$. 这就是说

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (|x|<1).$$

用同样的方法可以算出

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (|x|<1).$$

2° 令 $y=\arctan x$,于是 $x=\tan y$. 将函数 $\tan y$ 对 y 求导,得到 $\frac{1}{\cos^2 y}$. 由定理 3.4,我们有

$$f'(x)=\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y},$$

即

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

用同样的方法可以算出

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.\quad\square$$

例 11 幂指函数的求导.

幂指函数是指形如 $f(x)=u(x)^{v(x)}$ 的函数,在它的定义域上 $u(x)>0$.将 f 改写为

$$f(x)=e^{\ln f(x)}=e^{v(x)\ln u(x)},$$

然后将上式双方对 x 求导,我们有

$$\begin{aligned}f'(x)&=e^{v\ln u}(v\ln u)'\\&=e^{v\ln u}\left(v'\ln u+\frac{v}{u}u'\right),\end{aligned}$$

这也就是

$$f'(x)=f(x)\left(v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)}{u(x)}u'(x)\right).\quad\square$$

特别,对地幂函数 $f(x)=x^{\mu}$(这里 μ 为不等于零的常数),容易算出

$$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}.$$

这个公式是例 2 中的公式的推广,在那里 μ 限于正整数.作为特例,我们有

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}(x\neq 0),$$

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x>0),$$

等等.

例 12 设 f 是一个恒取正值的可导函数,那么由公式

$$(\ln f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

可以推出

$$f'(x)=f(x)(\ln f(x))'.\quad\square$$

这个公式对于计算由许多个函数的乘积组成的函数 f 的导数通常是十分方便的.例如说,设

$$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x),$$

这时得出

$$(u_1u_2\cdots u_n)'=u_1u_2\cdots u_n\left(\sum_{i=1}^{n}\ln u_i\right)'$$
$$=u_1u_2\cdots u_n\sum_{i=1}^{n}\frac{u'_i}{u_i},$$

即

$$(u_1u_2\cdots u_n)'=u'_1u_2\cdots u_n+u_1u'_2\cdots u_n+\cdots+u_1u_2\cdots u_{n-1}u'_n.$$

这是定理 3.2 的 2°中的公式的推广.

到此为止,我们已经学会了如何对最简单的初等函数求导,不仅如此,我们还学会了求导运算的许多法则,包括求导的四则运算,链式法则,反函数的求导法则.有了这些,我们已经有了本领来求任何初等函数的导数.这种本领已如此之大,以至于你企图找出一个你不会求导的函数都非常不容易.这表明,我们用以求导的工具已是相当完备.每一名数学家、科学家和工程师必须学会求导的技巧,做到既快又不出错.为了达到这种熟练程度,读者必须做大量的习题,就如同过去的营业员、会计师去练习打算盘那样.

现在,我们用列表的形式把已经学习过的求导公式作一总览.

f	f'	f	f'	f	f'
c 常数	0	x^μ	$\mu x^{\mu-1}$	e^x	e^x
a^x	$a^x\ln a$	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$		

最后举一个导数应用的例子.

例 13 有一底半径为 R cm 的正圆锥容器,顶点有一小孔,以便向容器内注水.今以每秒 $A\text{cm}^3$ 的速度向容器内注水,试求容器内水位等于锥高的一半时,水面上升的速度.

解 从图 3-6 中容易看出,水面高度 x 是时间 t 的函数,设为 $x=x(t)$,故水面上升的速度便是 $x'(t)$.设锥高为 h,我们先算出水面高度为 x 时,圆锥内水的体积 V.从图中可以看出,$r=\frac{h-x}{h}R$,因而

$$V=\frac{\pi R^2}{3}\left(h-\frac{(h-x)^3}{h^2}\right)$$
$$=\frac{\pi R^2}{3h^2}(h^3-(h-x)^3).$$

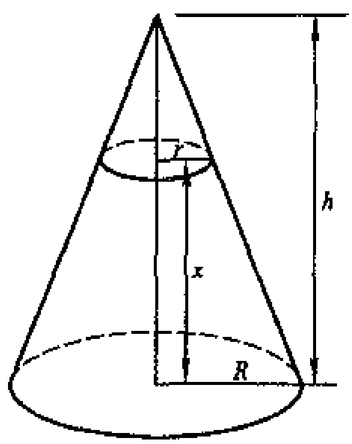

图 3-6

所以水量增加的速度

$$V'(t)=\frac{\pi R^2}{3h^2}[-3(h-x)^2(-x'(t))]$$
$$=\frac{\pi R^2}{h^2}(h-x)^2x'(t).$$

根据题中假设 $V'(t)=A$,因而

$$x'(t)=\frac{Ah^2}{\pi R^2(h-x)^2}.$$

这就是水面上升的速度.从表达式中可以看出,当 x 越大时,$x'(t)$越大,即水面上升的速度越快,这与直观是一致的.特别,当 $x=\frac{h}{2}$时,水面上升的速度为$\frac{4A}{\pi R^2}$,这就是本题的答案. □

练习题 3.2

1. 求 $y'=y'(x)$,其中 a,b 均为常数:

(1) $y=x^3-2x+6$;　(2) $y=\sqrt{x}-\frac{1}{x}$;

(3) $y=a\cos x+b\sin x$;　(4) $y=x^{3/5}+x\sin x$;

(5) $y=3\ln x^2+ae^{bx}$;　(6) $y=\log_a x+ba^x,a>0$;

(7) $y=x\sin x^2$;　(8) $y=a\tan(bx)+b\arctan(ax)$;

(9) $y=\sqrt[3]{x}\cos x$;　(10) $y=(x^3+1)(ax+b)$;

(11) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$,其中 a,b,c,d 为常数;

(12) $y=a^x\ln x(a>0)$;　(13) $y=x\ln x$;

(14) $y=a^x\tan x(a>0)$;　(15) $y=\arcsin x+x^2\arctan x$;

(16) $y=\frac{x\ln x}{1+x^2}$;　(17) $y=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$;

(18) $y=\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}$;　(19) $y=x\ln x\sin x$;

(20) $y=\sin^3 x$;　(21) $y=e^{ax}\cos bx$;

(22) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$； (23) $y=\sqrt{1-x^2}$；

(24) $y=\arctan(1+x^2)$； (25) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$；

(26) $y=\ln(\cos x+\sin x)$；

(27) $y=x(\cos(\ln x)-\sin(\ln x))$；

(28) $y=a^{\sin x}(a>0)$； (29) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$；

(30) $y=x^{x^x}(x>0)$； (31) $y=\operatorname{ch} x$；

(32) $y=\operatorname{sh} x$.

2. 利用 $1+x+\cdots+x^n$ 的求和，求出下列各式的和：

(1) $1+2x+3x^2+\cdots nx^{n-1}$； (2) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^{k-1}}$；

(3) $1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$.

3. 若 f 是一可导的周期函数，则 f' 也是周期函数.

4. 证明：

(1) f 是一可导的奇函数，则 f' 是偶函数；

(2) f 是一可导的偶函数，则 f' 是奇函数.

对以上命题作出几何解释.

5. 设 f 是一个三次多项式，且 $f(a)=f(b)=0$. 证明：函数 f 在$[a,b]$上不变号的必要充分条件是 $f'(a)f'(b)\leqslant 0$.

6. 设函数 f 在$[a,b]$上连续，$f(a)=f(b)=0$，且

$$(\lim_{x\to a+}f'(x))(\lim_{x\to b-}f'(x))>0.$$

证明 f 在(a,b)内至少有一个零点.

7. 证明双曲线 $xy=a>0$ 在各点处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为常数.

8. 证明抛物线的光学性质：若置光源于抛物线的焦点上，经过抛物镜面的反射之后，成为一束平行于抛物线的对称轴的光线.

9. 水自高为 18 cm，底半径为 6 cm 的圆锥形漏斗流入直径为 10 cm 的圆柱形桶内. 已知漏斗水深 12 cm 时水面下降速度为 1 cm/s，求此时桶中水面上升的速度.

问题 3.2

1. 设 $f(0)=0$，$f'(0)$存在且有限，令
$$x_n=f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right),n\in\mathbf{N}^*,$$
试求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．并利用以上结果，计算：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n^2}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n^2}\right)$.

2. 证明组合恒等式：

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1},n\in\mathbf{N}^*$；

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2=n(n+1)2^{n-2},n\in\mathbf{N}^*$.

3. 求 $\sum\limits_{k=1}^{n}k\sin kx$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{n}k\cos kx$ 的和．

4. 设函数 f 在 $x=0$ 处连续，如果
$$\lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=m,$$
求证 $f'(0)=m$.

5. 求证：在 $\mathbf{R}$ 上不存在可导函数 f，使其满足
$$f\circ f(x)=-x^3+x^2+1.$$

6. 求证：在 $\mathbf{R}$ 上不存在可导函数 f，使其满足
$$f\circ f(x)=x^2-3x+3.$$

§3.3 高阶导数

设函数 f 在区间 I 上可导，那么，$f'(x)$，$x\in I$，在 I 上定义了一个函数 f'，称为 f 的**导函数**．这时，我们自然要进一步研究 f' 是不是可导？如果 f' 在 I 上可导，那么 f' 的导函数 $(f')'$——记为 f''——称为 f 的**二阶导函数**．二阶导函数 f'' 的导函数（如果存在的话）记为 f'''，称为 f 的三阶导函数．归纳地，对任何自然数 $n\in\mathbf{N}^*$，可以定义 f 的 n **阶导函数** $f^{(n)}$．

对于非匀速直线运动，若用 $s(t)$ 表示质点的位移和时间的关系，那么一阶导数 $s'(t)$ 是速度函数，而二阶导数 $s''(t)$ 是质点的加速度函数．为了说法上的

一致起见,函数 f 的导数也称为 f 的一阶导数. 对于平面曲线 $y=f(x)$ 来说,一阶导数 $f'(x)$ 表示曲线上各点切线的斜率. 至于二阶导数 $f''(x)$ 的许多重要的几何应用,我们将在以后细细道来.

例1　考虑函数 $y=\mathrm{e}^{\lambda x}$ (λ 为一常数). 我们有

$$\lambda'=\lambda\mathrm{e}^{\lambda x},y''=\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x},y'''=\lambda^3\mathrm{e}^{\lambda x},\cdots$$

用归纳法,可证:对一切 $n\in\mathbf{N}^*$,有公式

$$y^{(n)}=\lambda^n\mathrm{e}^{\lambda x}.\quad\square$$

例2　对于 $n\in\mathbf{N}^*$,证明

$$\sin^{(n)}x=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

证明　因为

$$(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}(\sin x)''&=\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'\\&=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)'\\&=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

归纳地,我们得出

$$\sin^{(n)}x=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

同法可证,对一切 $n\in\mathbf{N}^*$,有

$$\cos^{(n)}x=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).\quad\square$$

例3　定义函数

$$f(x)=\begin{cases}x^4\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\end{cases}$$

求 f''.

解　欲求 f'',须先求 f'. 当 $x\neq 0$ 时,$f'(x)=\left(x^4\sin\dfrac{1}{x}\right)'$ 可用公式计算,但 $f'(0)$ 只能由导数的定义来计算:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}h^3\sin\frac{1}{h}=0.$$

所以

$$f'(x)=\begin{cases}4x^3\sin\dfrac{1}{x}-x^2\cos\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

按照导数的定义,我们有

$$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(4h^2\sin\frac{1}{h}-h\cos\frac{1}{\mathrm{h}}\right)=0,$$

从而

$$f''(x)=\begin{cases}12x^2\sin\dfrac{1}{x}-6x\cos\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

请注意,对任何 $n\in\mathbf{N}^*$,$f^{(n)}(x)$对 $x\neq 0$ 都是存在的,但是 $f'''(0)$已不存在. □

对于计算 n 阶导数,显然有下列的公式

$$(f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)},$$
$$(cf)^{(n)}=cf^{(n)},$$

这里 c 是任意的常数.下面,我们来计算两个函数的乘积的 n 阶导数$(fg)^{(n)}$.首先,

$$(fg)'=f'g+fg',$$

接着进行下列计算

$$(fg)''=(f'g)'+(fg')'=f''g+f'g'+f'g'+fg''.$$

也就是说,我们有

$$(fg)''=f''g+2f'g'+fg''.$$

耐心地再做一次,得到

$$(fg)'''=f'''g+3f''g'+3f'g''+fg'''.$$

这里所呈现的规律看上去多么像 Newton 二项式展开!事实上,我们有

定理 3.5(Leibniz) 设函数 f 与 g 在区间 I 上都有 n 阶导数,那么乘积 fg 在区间 I 上也有 n 阶导数,并且

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)},$$

其中组合系数

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}(k=0,1,2,\cdots,n).$$

证明 我们把欲证的等式的右边改写为下列代数上对称的形式

$$\sum_{i+j=n}\frac{n!}{i!\ j!}f^{(i)}g^{(j)}.$$

这里的和式是对所有适合 $i+j=n$ 的有序非负整数对(i,j)来求,所以共有

$n+1$个加项.这种“对称化”的处理,将对计算带来方便.

我们对 n 来进行归纳法.$n=1$ 时,命题显然成立.现在假设 $m\geqslant 1$,我们有

$$(fg)^{(m)}=\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!\ j!}f^{(i)}g^{(j)}.$$

在上式双方再求一次导数,得到

$$\begin{aligned}(fg)^{(m+1)}&=\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!\ j!}(f^{(i)}g^{(j)})'\\&=\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!\ j!}(f^{(i+1)}g^{(j)}+f^{(i)}g^{(j+1)})\\&=\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!\ j!}f^{(i+1)}g^{(j)}+\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!\ j!}f^{(i)}g^{(j+1)}.\end{aligned}$$

在最后的那个和式中,令 $k=j+1$,于是 $j=k-1$ 且 $i+k=i+j+1=m+1$.因此这个和式变为

$$\sum_{i+k=m+1}\frac{m!}{i!\ (k-1)!}f^{(i)}g^{(k)}.$$

再把“哑指标”k 换为j,得到

$$\sum_{i+j=m+1}\frac{m!}{i!\ (j-1)!}f^{(i)}g^{(j)}.$$

对称地,我们有

$$\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!\ j!}f^{(i+1)}g^{(j)}=\sum_{i+j=m+1}\frac{m!}{(i-1)!\ j!}f^{(i)}g^{(j)}.$$

从而

$$\begin{aligned}(fg)^{(m+1)}&=\sum_{i+j=m+1}m!\left(\frac{1}{(i-1)!\ j!}+\frac{1}{i!\ (j-1)!}\right)f^{(i)}g^{(j)}\\&=\sum_{i+j=m+1}m!\ \frac{(i+j)}{i!\ j!}f^{(i)}g^{(j)}\\&=\sum_{i+j=m+1}\frac{(m+1)!}{i!\ j!}f^{(i)}g^{(j)}.\end{aligned}$$

这就完成了归纳证明. □

例 4 设 $y=x^2\cos x$,求 $y^{(50)}$.

解 利用 Leibniz 定理,我们有

$$\begin{aligned}y^{(50)}&=(x^2\cos x)^{(50)}\\&=(\cos x)^{(50)}x^2+\binom{50}{1}(\cos x)^{(49)}(x^2)'\\&\quad+\binom{50}{2}(\cos x)^{(48)}(x^2)''.\end{aligned}$$

等式只需写到此地,因为 x^2 的三阶及三阶以上的导数恒等于零.由于

$$(\cos x)^{(48)}=\cos(x+24\pi)=\cos x,$$

$$(\cos x)^{(49)} = -\sin x,$$
$$(\cos x)^{(50)} = -\cos x,$$

从而

$$y^{(50)} = (2450 - x^2)\cos x - 100x\sin x. \quad \square$$

所谓"研究函数",就是研究函数的变化.我们已经知道,函数的导数就是函数的变化率.由此自然想到,函数的导数既然能深刻地表示函数变化的规律,自然也就成为研究函数的重要工具.在下一节中,我们将叙述并证明微分学中几个非常重要的定理,以后将利用它们作为研究函数的基本工具.

练习题 3.3

1. 求 y 关于 x 的二阶导数 y'',设:

(1) $y = e^{x^2}$;　　(2) $y = x^2 a^x\ (a>0)$;

(3) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$;　　(4) $y = \dfrac{1}{a+\sqrt{x}}$;

(5) $y = \tan x$;　　(6) $y = (1+x^2)\arctan x$;

(7) $y = \ln\sin x$;　　(8) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(9) $y = x^3\cos x$;　　(10) $y = x\ln x$.

2. (1) 设 $f(x) = e^{2x-1}$,求 $f''(0)$;

(2) 设 $f(x) = \arctan x$,求 $f''(1)$;

(3) 设 $f(x) = \sin^2 x$,求 $f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3. 求下列高阶导数:

(1) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$,求 $y^{(10)}$;　　(2) $y = \dfrac{x^2}{1-x}$,求 $y^{(8)}$.

4. 将 4 次多项式 $3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x - 1$ 按 $(x-2)$ 的方幂展开.

5. 设函数 f 在 $(-\infty, x_0]$ 上有二阶导数,设

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } x \leqslant x_0 \text{ 时}; \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c, & \text{当 } x = x_0 \text{ 时}. \end{cases}$$

问 a, b, c 为何值时函数 F 在 $\mathbf{R}$ 上有二阶导函数.

问题 3.3

1. 设 $m,n\in\mathbf{N}^*$，证明：

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^m=\begin{cases}0, & \text{当 } m\leqslant n-1 \text{ 时;}\\(-1)^n n!, & \text{当 } m=n \text{ 时.}\end{cases}$$

2. 设 u,v,w 都是 t 的可导函数，试作出 $(uvw)^{(n)}$ 的 Leibnitz 公式，这里 $n\in\mathbf{N}^*$.

3. 设 $y=x^{n-1}e^{1/x}$，求证：

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{1/x}$$

4. 设 $y=\arctan x$，求证：

$$y^{(n)}=\frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n},$$

其中 P_{n-1} 为最高次项系数是 $(-1)^{n-1}n!$ 的 $n-1$ 次多项式.

5. 设 $f_n(x)=x^n\ln x$，$n\in\mathbf{N}^*$. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}.$$

6. 设多项式 p 只有实零点，求证：$(p'(x))^2\geqslant p(x)p''(x)$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 成立.

7. 设 $f(x)=\arctan x$，求证：当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时

$$f^{(n)}(x)=(n-1)!\ \cos^n y\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right),$$

其中 $y=f(x)$.

8. 求 $(e^x\cos x)^{(n)}$ 和 $(e^x\sin x)^{(n)}$.

9. 设 $y=(1+\sqrt{x})^{2n+2}$，$n\in\mathbf{N}^*$，求 $y^{(n)}(1)$.

§3.4 微分学的中值定理

在这一节中，我们研究定义在有限闭区间 $[a,b]$ 上的函数 f，并且设 f 在 $[a,b]$ 上连续、在开区间 (a,b) 上可导. 所有的讨论都是在这些条件之下进行的.

定义 3.4 设函数 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$. 如果对点 $x_0\in(a,b)$ 存在 $\delta>0$ 使得 $\Delta=$

$(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[a,b]$并且当 $x\in\Delta$ 时 $f(x_0)\geqslant f(x)$，即 $f(x_0)$是 f 在 Δ 上的最大值，那么称 $f(x_0)$是 f 在$[a,b]$上的一个**极大值**，x_0 称为 f 的一个**极大值点**.

类似地，可以定义 f 在$[a,b]$上的**极小值**和**极小值点**.

极小值和极大值统称为**极值**，而极小值点和极大值点统称为**极值点**.

应当特别强调的是，极值点只能在区间$[a,b]$的内点上才可定义；极值是一个局部的概念，它只在极值点的一个充分小的近旁才有最大或最小值的特征.在图 3-7 中，x_1,x_2,x_3,x_4 都是极值点.确切地说，x_1 与 x_3 是极小值点；x_2 与 x_4 是极大值点.

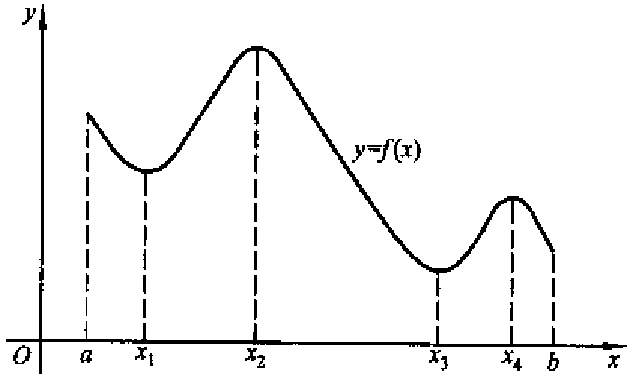

图 3-7

从图上可见，极小值 $f(x_1)$比极大值 $f(x_4)$还大.由此可知，f 在区间$[a,b]$上的最大值与最小值，同 f 在这区间内的极值是不同的概念.当然，如果在$[a,b]$的内点 x_0 上函数 f 取得它在$[a,b]$上的最大(或最小)值，那么 $f(x_0)$自然是一个极大(或极小)值.

当函数 f 在(a,b)内可导的时候，下述的 Fermat 定理给出了极值点的必要条件.

定理 3.6(Fermat) 若函数 f 在其极值点 $x_0\in(a,b)$处可导，则必有 $f'(x_0)=0$.

证明 设 $f(x_0)$是极大值.依定义 3.4，存在 $\delta>0$，使得凡是 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时有 $f(x_0)\geqslant f(x)$.因此，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0,$$

而当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，又有不等式

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0.$$

定理的条件是 $f'(x_0)$存在,因此 $f'_-(x_0)$与 $f'_+(x_0)$存在且相等.在以上的两个不等式中分别令 $x\to x_0-$ 与 $x\to x_0+$,得到

$$f'_-(x_0)\geqslant 0, f'_+(x_0)\leqslant 0.$$

因此必须 $f'(x)=0$. □

定义 3.5 满足 $x_0\in(a,b)$且 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0,称为函数 f 的一个驻点.

定理 3.6 说的是:函数在其上可导的极值点必为驻点.但是这个命题的逆命题是不正确的.例如函数 $f(x)=x^3$, $x=0$ 是它的一个驻点,但是它不是一个极值点.Fermat 定理的几何意义是:如果 x_0 是函数 f 的极值点且在$(x_0,f(x_0))$处曲线 $y=f(x)$有切线存在,那么这切线必须与横轴平行.

定理 3.7(Rolle) 设函数 f 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f(a)=f(b)$,那么存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=0$.

证明 闭区间$[a,b]$上的连续函数 f 一定取到它的最小值,记为 m;也一定取得它的最大值,记为 M.如果 $M=m$,那么 f 是$[a,b]$上的常值函数,这时 $f'=0$,因此(a,b)中的任何一点 ξ 都可充当所求的点.

设 $M>m$.由于 $f(a)=f(b)$,可见 m 与 M 中至少有一个是被 f 在内点 $\xi\in(a,b)$所取得.这时 ξ 必为一极值点,依 Fermat 定理得知 $f'(\xi)=0$. □

作为 Rolle 定理的应用,我们来看

例 1 考察 $2n$ 次多项式

$$Q(x)=x^n(1-x)^n, n\in\mathbf{N}^*.$$

求证 n 次多项式 $Q^{(n)}$在(0,1)之内有 n 个互不相同的实零点.

证明 利用 Leibniz 定理计算 Q 的 m 阶导数

$$\begin{aligned}Q^{(m)}(x)&=(x^n(1-x)^n)^{(m)}\\&=\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!\,j!}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{n!}{(n-j)!}(-1)^j x^{n-i}(1-x)^{n-j}.\end{aligned}$$

由此看出,当 $m=0,1,2,\cdots,n-1$ 时,上式右边的各项中均含有因式 $x(1-x)$,因此

$$Q^{(m)}(0)=Q^{(m)}(1)=0, m=0,1,2,\cdots,n-1.$$

首先,由 $Q(0)=Q(1)=0$,运用 Rolle 定理知,存在 $\xi\in(0,1)$使 $Q'(\xi)=0$.注意到 Q'在区间$[0,\xi]$与$[\xi,1]$上适合 Rolle 定理的条件,因此存在 $\eta_1\in(0,\xi)$及 $\eta_2\in(\xi,1)$使得 $Q''(\eta_i)=0$, $i=1,2$,这里 $0<\eta_1<\eta_2<1$.因为 Q''在三个区间$[0,\eta_1]$,$[\eta_1,\eta_2]$,$[\eta_2,1]$上都满足 Rolle 定理的条件,由此存在 $0<\zeta_1<\zeta_2<\zeta_3<1$,使得

$$Q'''(\zeta_i)=0, i=1,2,3.$$

继续前进,得知存在 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{n-1}<1$,使得 $Q^{(n-1)}(\lambda_i)=0, i=1,2,\cdots,n-1$.注意到

$$Q^{(n-1)}(0)=Q^{(n-1)}(1)=0,$$

可知 $Q^{(n-1)}$ 在 $[0,\lambda_1],[\lambda_1,\lambda_2],\cdots,[\lambda_{n-1},1]$ 这 n 个区间上都适合 Rolle 定理的条件,得知存在 $0<\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_n<1$,使

$$Q^{(n)}(\mu_i)=0, i=1,2,\cdots,n. \quad \square$$

在通常的数学分析教科书中,大都把 Rolle 定理推广到 Lagrange 定理,进而推广到 Cauchy 定理.在这里,我们陈述并证明一个定理,它与 Cauchy 定理实际上是等价的.

定理 3.8 设 f 与 λ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可微,并且 $\lambda(a)=1,\lambda(b)=0$,则必存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)=\lambda'(\xi)(f(a)-f(b)).$$

证明 引入函数

$$\varphi(x)=f(x)-(\lambda(x)f(a)+(1-\lambda(x))f(b)).$$

由直接的计算,可知 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$.因此函数 φ 适合 Rolle 定理的条件.故存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $\varphi'(\xi)=0$.由于

$$\varphi'(x)=f'(x)-\lambda'(x)(f(a)-f(b)).$$

将 ξ 代入上式,得到

$$f'(\xi)=\lambda'(\xi)(f(a)-f(b)). \quad \square$$

我们将从定理 3.8 推导出定理 3.9、定理 3.10 以及下一章的定理 4.3.现在取

$$\lambda(x)=\frac{b-x}{b-a}, x\in[a,b],$$

由定理 3.8 得出

定理 3.9(Lagrange) 设 f 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,则存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

在一元函数微分学中,这是一个十分重要的定理,称为 Lagrange 中**值定理**.

现在我们来看看上式的几何解释.在区间 $[a,b]$ 上,画出函数 $y=f(x)$ 的图形.用直线段把这曲线的两个端点 $(a,f(a))$ 与 $(b,f(b))$ 连结起来(图 3-8),上式的左边正是这直线段的斜率,上式的意义是:在曲线 $y=f(x)$ 的一个内点上,有平行于这段直线的切线.很显然,Rolle 定理是 Lagrange 中值定理的特例.

我们再来谈谈定理 3.9 的运动学意义.设 f 是质点的运动规律,质点在时间区间 $[a,b]$ 上走过的路程是 $f(b)-f(a)$,那个 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 代表质点在 (a,b)

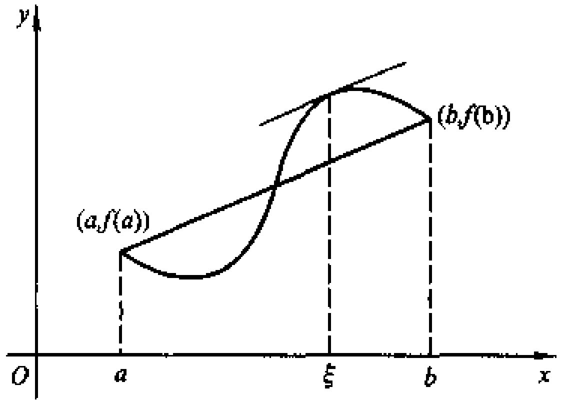

图 3-8

上的平均速度. 定理3.9表明, 在(a,b)中存在这样的时刻ξ, 质点在ξ处的瞬时速度$f'(\xi)$恰好就是它在$[a,b]$上的平均速度.

Lagrange中值定理有着很多的应用.

例2　证明$\arctan x$在$(-\infty,\infty)$上一致连续.

证明　任取$x_1,x_2\in\mathbf{R}$且$x_1<x_2$. 在区间$[x_1,x_2]$上, 函数$\arctan x$适合中值定理的条件, 因此存在$\xi\in(x_1,x_2)$, 使得

$$\arctan x_2-\arctan x_1=\frac{1}{1+\xi^2}(x_2-x_1).$$

由于

$$0<\frac{1}{1+\xi^2}<1,$$

我们得到

$$|\arctan x_2-\arctan x_1|\leqslant|x_2-x_1|$$

对一切x_1,x_2成立. 因此, 对任意给定的ε, 可取$\delta=\varepsilon$, 只要$|x_1-x_2|<\delta$而不管x_1,x_2这两点位于何处, 总有

$$|\arctan x_2-\arctan x_1|<\varepsilon.$$

这说明$\arctan x$在$(-\infty,\infty)$上是一致连续的. □

从以上的证明中不难看出, 如果函数f在开区间(a,b)上有有界的导函数, 那么f在$[a,b]$上一定是一致连续的.

例3　设$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$, 求证:

$$\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\tan\beta-\tan\alpha<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}.$$

证明　在区间$[\alpha,\beta]$上对函数$\tan x$使用中值定理, 可知存在$\xi\in(\alpha,\beta)$, 使得

$$\tan\beta-\tan\alpha=(\beta-\alpha)(\tan x)'\Big|_{x=\xi}=\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\xi}.$$

由于在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上 $\cos x$ 是严格递减的函数,从而由 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$可得

$$\cos^2\alpha>\cos^2\xi>\cos^2\beta>0.$$

所以

$$\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\xi}=\tan\beta-\tan\alpha<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}.\quad\square$$

例 4 设函数 f 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,并且 $f(0)=0,f(1)=1$. 又设 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是任意的 n 个正数.求证:在$(0,1)$中存在 n 个互不相同的数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$,使得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(t_i)}=\sum_{i=1}^{n}k_i.$$

证明 令 $K=k_1+k_2+\cdots+k_n$, $y_0=0$ 以及

$$y_i=\frac{1}{K}(k_1+\cdots+k_i),i=1,2,\cdots,n.$$

所以 $0=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=1$.取 $x_0=0,x_n=1$.在$[0,1]$上对连续函数 f 用介值定理,可以求得一点 $x_1\in(0,1)$使 $f(x_1)=y_1$.再在$[x_1,1]$上用介值定理求得一点 $x_2\in(x_1,1)$使 $f(x_2)=y_2$.仿此前进,求出 $x_3<x_4<\cdots<x_{n-1}<1$,使得 $f(x_i)=y_i(i=3,\cdots,n-1)$.总之,我们有 $f(x_i)=y_i,i=0,1,2,\cdots,n$.在每一个小区间$[x_{i-1},x_i]$上,使用中值定理,求得 $t_i\in(x_{i-1},x_i)$满足

$$y_i-y_{i-1}=f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(t_i)(x_i-x_{i-1}),$$

由此得出

$$\frac{y_i-y_{i-1}}{f'(t_i)}=x_i-x_{i-1}.$$

即

$$\frac{k_i}{f'(t_i)}=K(x_i-x_{i-1}).$$

将上式对 i 从 1 到 n 求和,得到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(t_i)}=K\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=K(x_n-x_0)=K.\quad\square$$

由 Lagrange 中值定理可以得到下面一条十分有用的推论.

推论 设函数 f 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导.函数 f 在$[a,b]$上为常数的必要充分条件是 $f'=0$ 在(a,b)内成立.

必要性十分明显,只要证明充分性.设 $f'=0$ 在(a,b)内成立.任取两点

$x_1<x_2\in[a,b]$,故存在 $\xi\in(x_1,x_2)$使得 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$. 由于 $f'(\xi)=0$,得知 $f(x_1)=f(x_2)$. 函数 f 在$[a,b]$上的任何两点取相等的值,所以是常数. □

由推论还可以得出一个十分有用的性质:设函数 f 与 g 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,并且 $f'=g'$在(a,b)内成立,那么 $f-g$ 在$[a,b]$上是一个常数. 为了证明这个结论,只需将推论应用于函数 $f-g$ 即可.

例 5 证明:当 $x\in(-\infty,1)$时

$$\arctan\frac{1+x}{1-x}=\arctan x+\frac{\pi}{4}.$$

证明 对任意的正数 $A>0$,在区间$(-A,1)$上同时考虑下列函数

$$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x},$$

$$g(x)=\arctan x.$$

求导运算表明,

$$f'(x)=g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

对 $x\in(-A,1)$成立. 因此 $f-g$ 在所讨论的区间中是一个常数. 由于 $0\in(-A,1)$并且 $f(0)-g(0)=\frac{\pi}{4}$,知 $f(x)=g(x)+\frac{\pi}{4}$对$(-A,1)$成立. 因 A 是任意的正数,所以该等式在$(-\infty,1)$内成立. □

上面的证明只不过是演示一种证明等式的方法. 其实,不用求导也可证明例 5 的结论,只需在三角公式

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

中令 $\alpha=\frac{\pi}{4}$,$\beta=\arctan x$ 便可得证.

现在,我们回头来推导最后一个中值定理. 如果另一个函数 g 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,并且 $g(a)\neq g(b)$,那么

$$\lambda(x)=\frac{g(b)-g(x)}{g(b)-g(a)},x\in[a,b]$$

就是一个合适的选择. 如果我们设在开区间(a,b)内 $g'(x)\neq 0$,那么就保证了条件 $g(a)\neq g(b)$成立. 这是因为若 $g(a)=g(b)$,那么由 Rolle 定理,存在 $\xi\in(a,b)$使 $g'(\xi)=0$ 而与 $g'(x)\neq 0$ 矛盾.

将这样选择的 λ 代入定理 3.8,立即得出

定理 3.10(Cauchy) 设函数 f 和 g 在区间$[a,b]$上连续,在区间(a,b)上可导,且当 $x\in(a,b)$时 $g'(x)\neq 0$,这时必存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

在上式中若取 $g(x)=x$,Cauchy 中值定理就退化为 Lagrange 中值定理.可见 Cauchy 中值定理是 Lagrange 中值定理的推广.

本节中的 Rolle 定理、Lagrange 定理和 Cauchy 定理,前一个都是后一个的特例,它们统称为"微分学的中值定理".它们有一些共同的特征:对函数的要求是在闭区间$[a,b]$上连续、在开区间(a,b)内可导;在结论中都断言在开区间(a,b)内有某一点 ξ 存在.这种 ξ,至少有一个,但是可能不止一个.定理只是言明这种点的"存在性",除了对于一些比较简单的函数,无法指明这种点的确切位置.

例6 讨论二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$,求出点 ξ,使得等式

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\xi),x\neq y$$

成立.

解 由于

$$\begin{aligned}f(x)-f(y)&=a(x^2-y^2)+b(x-y)=(x-y)(a(x+y)+b)\\&=(x-y)\left(2a\left(\frac{x+y}{2}\right)+b\right),\end{aligned}$$

以及 $f'(x)=2ax+b$,所以 $\xi=\dfrac{x+y}{2}$. □

对于比较复杂的函数,求出这种 ξ 通常是十分困难的.好在当我们对函数 f 的导函数f'在(a,b)上的某些全局性质(例如说正性、有界性等等)有所了解的时候,也没有必要把这种点真正找出来.

练习题 3.4

1. 证明:对任意实数 c,方程 $x^3-3x+c=0$,在$[0,1]$上无相异的根.
2. 设函数 f 在(a,b)上可导,且 $f(a+)=f(b-)$有限或∞,求证:存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f'(\xi)=0$.
3. 证明下列不等式:
   (1) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|,x,y\in\mathbf{R}$;
   (2) $py^{p-1}(x-y)\leqslant x^p-y^p\leqslant px^{p-1}(x-y)$,其中 $0<y<x$ 且 $p>1$;
   (3) $\dfrac{a-b}{a}<\log\left(\dfrac{a}{b}\right)<\dfrac{a-b}{b}$,其中 $0<b<a$;
   (4) $\dfrac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}<\arctan a-\arctan b<a-b$,其中 $0<b<a$.

4. 设函数 f 在 $\mathbf{R}$ 上有 n 阶导数，又 p 是一个 n 次的多项式，最高次项系数为 a_0. 如果有互不相同的 x_i 使得 $f(x_i)=p(x_i)$, $i=0,1,\cdots n$，求证：存在 ξ，满足 $a_0=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$.

5. 设常数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足

$$\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0,$$

求证：多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 在 $(0,1)$ 内有一零点.

6. 设函数 f 在区间 $(a,+\infty)$ 上可导且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，求证：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$$

7. 设函数 f 在开区间 $(0,a)$ 内可导，且 $f(0+)=+\infty$，证明：f' 在 $x=0$ 的右旁无下界.

8. 已知 $f(1)=1$，求 $f(2)$. 如果：

$xf'(x)-f(x)=0$ 对一切 $x>0$ 成立.

9. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可导，$ab>0$，求证：存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

10. 设 f 既非常值函数又非线性函数，且在 $[a,b]$ 上连续可导，则存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$|f'(\xi)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

11. 如果二阶可导的函数 f 是微分方程 $y''+y=0$ 的一个解，证明：$f^2+(f')^2$ 是一常值函数.

12. 利用前题的结果，证明：微分方程 $y''+y=0$ 的解都具有形式

$$y(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x,$$

这里 λ 和 μ 为常数.

13. 设 f 在 $(-r,r)$ 上有 n 阶导数且 $\lim\limits_{x\to0}f^{(n)}(x)=l$，求证 $f^{(n)}(0)=l$.

问题 3.4

1. 设 f 与 g 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，它们在 $-\infty$ 和 $+\infty$ 处分别存在有限的极限. 又设当 $x\in\mathbf{R}$ 时 $g'(x)\neq0$. 证明：存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$ 使得

$$\frac{f(+\infty)-f(-\infty)}{g(+\infty)-g(-\infty)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

2. 如果函数 f 与 g 可导，且对一切 x 都有

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}\neq 0,$$

那么在 f 的任何两个不同的零点之间，至少有 g 的一个零点.

3. 设 p 是一个实系数多项式，再构造一个多项式

$$q(x)=(1+x^2)p(x)p'(x)+x(p(x)^2+p'(x)^2).$$

假设方程 $p(x)=0$ 有 n 个大于 1 的不同实根，试证：方程 $q(x)=0$ 至少有 $2n-1$ 个不同实根.

4. 设 $n\in\mathbf{N}^*$，且

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k e^{\lambda_k x},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为互不相等的实数，$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是不同时为 0 的实数. 试问：函数 f 至多能有多少个实零点？

5. 设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上可导，$f(a)=0$，且当 $x\geqslant a$ 时有 $|f'(x)|\leqslant|f(x)|$. 求证：$f=0$.

6. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 可导，且 $0\leqslant f(x)\leqslant x/(1+x^2)$ 证明：存在 $\xi>0$ 使得，

$$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}.$$

§3.5 利用导数研究函数

在这里，所谓“研究函数”是指探究函数在指定区间上的单调性、凸性以及确定函数在这区间上的最小值和最大值. 上节所证明的 Lagrange 中值定理，为这些研究提供了强有力的工具.

1. 单调性

函数的单调性，是指函数的递减或递增的性质. 首先，我们有

定理 3.11 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，那么 f 在 $[a,b]$ 上递增(减)的必要充分条件是 $f'\geqslant 0(\leqslant 0)$ 在区间 (a,b) 内成立.

证明 先证必要性. 设 f 在 $[a,b]$ 上递增，任取一点 $x\in(a,b)$，对能使 $x+h\in(x,b)$ 的一切 h，不论 h 取正值还是取负值，总有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant 0.$$

令 $h\to 0$,由于 f 在 x 可导,得到

$$f'(x)\geqslant 0, x\in(a,b).$$

类似地,当 f 在$[a,b]$上递减时,可以推出 $f'(x)\leqslant 0$ 对 $x\in(a,b)$成立.

再证充分性.设在(a,b)上 $f'\geqslant 0$.对任何 $x_1,x_2\in[a,b]$且 $x_1<x_2$,依 Lagrange 中值定理,可得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),$$

其中 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$.所以 $f'(\xi)\geqslant 0$.由此得 $f(x_2)\geqslant f(x_1)$.

类似地,当在(a,b)上 $f'\leqslant 0$ 时,对任何 $x_1,x_2\in[a,b]$且 $x_1<x_2$,可以推出 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$. □

关于严格的单调性,有下列的充分条件.

定理 3.12 设函数 f 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导.如果 $f'>0(f'<0)$ 在(a,b)内成立,那么 f 在$[a,b]$上是严格递增(严格递减)的.

证明同定理 3.11 的充分性的证明是一样的. □

应当特别指出,定理 3.12 的逆定理不能成立,也就是说:严格递增(严格递减)的函数并不必须有严格正的(严格负的)导函数.例如,函数 $f(x)=x^3$ 虽然在$(-\infty,+\infty)$上是严格递增的,可是 $f'(0)=0$.

我们有

定理 3.13 设函数 f 在$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内除了有限个点之外,有正(负)的导数,那么 f 在$[a,b]$上严格递增(严格递减).

证明 设除了在点 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$外,$f'>0$,这里 $x_1<x_2<\cdots<x_n$.于是,f 在区间$[a,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_n,b]$上都是连续的,且在$(a,x_1)$,$(x_1,_2),\cdots,(x_n,b)$上 $f'>0$.所以,在$[a,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_n,b]$的每一个区间上,$f$ 是严格递增的.因此,在$[a,b]$上 f 也是严格递增的. □

下面的定理提供了严格单调函数的一个充分且必要的条件.

定理 3.14 设函数 f 在区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,那么 f 在$[a,b]$上严格递增(严格递减)的必要充分条件是

1° 当 $x\in(a,b)$时,$f'\geqslant 0(f'\leqslant 0)$;

2° 在(a,b)的任何开子区间内,$f'\neq 0$.

证明 先证必要性.由定理 3.11 可见,条件 1°是必要的.如果 2°不能被满足,即存在着一个被(a,b)包含的开区间,在其内 $f'=0$,那么在这个开区间内 f 是一常数,因此 f 在$[a,b]$上不是严格单调的.这样就证明了条件 2°也是必要的.

再证充分性.设条件 1°与 2°同时成立.由 $f'\geqslant 0$ 及定理 3.11,知 f 在$[a,b]$上是递增的.若有 $x_1,x_2\in[a,b]$,其中 $x_1<x_2$,使得 $f(x_1)=f(x_2)$,那么对

$x\in[x_1,x_2]$将有 $f(x_1)=f(x)=f(x_2)$，这表明在(x_1,x_2)内 f 为常数，从而在(x_1,x_2)内 $f'=0$，这与条件 2°相违．所以只能是当 $x_1,x_2\in[a,b]$，且 $x_1<x_2$ 时，导出 $f(x_1)<f(x_2)$，即 f 在$[a,b]$上是严格递增的．

类似地，当 $x\in(a,b)$时 $f'(x)\leqslant 0$ 且在(a,b)的任何开子区间内 $f'\neq 0$，可以推出 f 在$[a,b]$上是严格递减的． □

上述判断单调性的方法，可以帮助我们证明许多不等式．

例 1 求证：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时，

$$\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1.$$

证明 由于当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时，$0<\sin x<x$ 是熟知的事实，我们只需证明左边那一个不等式．考察函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x=0 \text{ 时};\\ \dfrac{\sin x}{x}, & \text{当 } 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\text{时}.\end{cases}$$

由于

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2},x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

以及已知的不等式 $x<\tan x$，我们知道 $f'(x)<0$ 对 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$成立．因此，$f$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上是严格递减的函数．当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(x).$$

即

$$\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}. \quad □$$

例 2 设 $n\in\mathbf{N}^*$求证：

$$e^x>1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

对 $x>0$ 成立．

证明 用数学归纳法．令

$$\varphi(x)=e^x-(1+x),x\geqslant 0.$$

显然 $\varphi(0)=0$．一阶导数

$$\varphi'(x)=e^x-1>0$$

对 $x>0$ 成立．这表明 φ 在$[0,+\infty)$上是严格递增的．特别地，当 $x>0$时有

$\varphi(x)>\varphi(0)=0$,即 $e^x>1+x$.所以 $n=1$ 时命题正确.

设我们有

$$e^x>1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

考察函数

$$\psi(x)=e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right),$$

$x\in[0,+\infty)$.显然 $\psi(0)=0$.依归纳假设,

$$\psi'(x)=e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)>0$$

对 $x\in(0,+\infty)$成立.这表明在$[0,+\infty)$上函数 ψ 是严格递增的.特别地,当 $x>0$时有 $\psi(x)>\psi(0)=0$.这正是

$$e^x>1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.\quad \square$$

2. 极值

在§3.4中,我们定义过极值点和极值,并且指出过若 x_0 是函数 f 的一个极值点,并且 $f'(x_0)$存在,那么必有 $f'(x_0)=0$,即 x_0 是 f 的一个驻点.但是,若 f 在 x_0 处不可导时,x_0 不会是驻点.例如,函数 $f(x)=|x|$在 $x=0$ 处取得极小值(实际上是最小值),但这一点不是 f 是驻点,因为这时 $f'(0)$不存在.很明显的是,在0的左边,函数$|x|$是严格递减的,而在0的右边,它是严格递增的,所以 $f(0)$是最小值.这种观察有其一般性,函数 f 由递减转变为递增的临界点处,应是 f 的一个极小值点;而由递增转变为递减的临界点处,应是 f 的一个极大值点.这样,即有如下的

定理 3.15　设函数 f 在$[a,b]$上连续,$x_0\in(a,b)$,如果存在正数 $\delta>0$ 使得

1° 在$(x_0-\delta,x_0)$内 $f'>0$,而在$(x_0,x_0+\delta)$内 $f'<0$,那么 $f(x_0)$是 f 的一个严格极大值.所谓"严格极大值"是指:当$0<|x-x_0|<\delta$ 时$f(x)<f(x_0)$;

2° 在$(x_0-\delta,x_0)$内 $f'<0$,而在$(x_0,x_0+\delta)$内 $f'>0$,那么 $f(x_0)$是 f 的一个严格极小值.所谓"严格极小值"是指:当$0<|x-x_0|<\delta$ 时$f(x)>f(x_0)$.

证明　我们只需证1°,因为2°的证明是完全类似的.由定理3.12可知,f 在$[x_0-\delta,x_0]$上是严格递增的,所以当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$时有 $f(x)<f(x_0)$;由同一定理可知,f 在$[x_0,x_0+\delta]$上是严格递减的,故当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$时 $f(x_0)>f(x)$,即 $f(x_0)$是 f 的一个严格极大值.　$\square$

请注意,上面的定理完全没有要求 f 在 x_0 处可导,因此适合函数$|x|$在 $x=0$ 的情况.

但是有这样的情形,存在着这样的函数 f,在它的某个极值点的任何一侧,f 都不具有单调的性质.考察函数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}+|x|, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时}. \end{cases}$$

它是一个处处连续的偶函数,$f(0)$是它的一个极小值.但是当 $x>0$ 时

$$f'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}+1,$$

所以对一切 $n\in\mathbf{N}^*$,我们有

$$f'\left(\frac{1}{n\pi}\right)=1-n\pi(-1)^n=1+(-1)^{n+1}n\pi.$$

当 n 从 $1,2,3,\cdots$ 依次地跑过时,$f'\left(\frac{1}{n\pi}\right)$交替地改变符号,因此对任意的 $\delta>0$,函数 f 在区间$(0,\delta)$上都不是单调的;在$(-\delta,0)$也是这样.这时定理3.15就不能用了.

下面的定理需要更强一些的条件,即设在驻点处 f 的二阶导数存在.

定理 3.16 设 f 在$[a,b]$上连续,x_0 是 f 的一个驻点.进一步,设 $f''(x_0)$ 存在,那么

1° 当 $f''(x_0)<0$ 时 $f(x_0)$是 f 的一个严格极大值;

2° 当 $f''(x_0)>0$ 时 $f(x_0)$是 f 的一个严格极小值.

证明 我们只证明 1°.由于 x_0 是 f 的一个驻点,$f'(x_0)=0$,于是

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=f''(x_0)<0,$$

因此存在一个 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}<0.$$

由此可知,当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$时 $f'(x)<0$,而当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$时 $f'(x)>0$.依定理 3.15 之 1°,便知 $f(x_0)$是 f 的一个严格极大值.

类似的方法可用来证明 2°. □

如果 $f''(x_0)=0$,这时各种情形都可能发生.例如 $f(x)=x^3$,$f''(0)=0$,这时 $x=0$ 不是 f 的极值点.又如 $f(x)=x^4$,$f''(0)=0$,这时 f 在 $x=0$ 处取严格的极小值;而当 $f(x)=-x^4$ 时,$f''(0)=0$,这时 f 在 $x=0$ 处取严格的极大值.因此,当 $f''(x_0)=0$ 时,还需有其他条件才能断言 f 在 x_0 处是否取极值.我们将在§4.2 中仔细讨论这个问题.

现在来讨论函数的最小值与最大值的问题,这个问题有重大的理论价值和应用价值.我们已经知道,连续函数 f 在它有定义的有限闭区间$[a,b]$上,必取

到它的最小值和最大值.为行文简短起见,最小值和最大值统称为**最值**,而在其上取到最值的点称为**最值点**.当函数 f 有最大值(或最小值)的时候,这个值便是惟一的,但是最值点却不一定只有一个.例如函数 $\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的最小值、最大值分别是 -1 与 1,但是最小值点与最大值点都是无限多个.

设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续.如果 f 的最值点在开区间 (a,b) 的内部,那么最值点就必然是极值点.因此,要选出 f 的最值点,只需在 f 的全体极值点与区间的两个端点 a 与 b 所组成的点集中去挑选.如果这个点集只含有限多个点,那么只需计算 f 在这些点上的值,其中最小的数与最大的数就分别是 f 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值.如果 f 在 (a,b) 内可导,而 f 的驻点的数目有限,设为 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 如果我们不愿意一一甄别其中哪一些是极值点,那么用

$$\min\{f(a),f(t_1),f(t_2),\cdots,f(t_n),f(b)\},$$
$$\max\{f(a),f(t_1),f(t_2),\cdots,f(t_n),f(b)\},$$

来算出 f 的最小值与最大值也不失是一种可行的方法.麻烦的是,当 f 在 (a,b) 内还有若干个不可导的点时,这些点自然不被算在驻点之列,因此函数 f 在这些点上所取的值必须添加进来,一并比较.

下面,我们来看几个例子.

例3 设 $f(x)=(x-1)(x-2)^2$.求函数 f 在区间 $\left[0,\frac{5}{2}\right]$ 上的最小值与最大值.

解 对 f 求导数,得到

$$f'(x)=(3x-4)(x-2).$$

常规的方法是由此求出驻点,但这里我们有更直接的办法.注意:在 $[0,1]$ 上 $f'(x)>0$,所以 f 在此区间上的最小值与最大值分别是 -4 与 0;在 $\left[2,\frac{5}{2}\right]$ 上 $f'(x)>0$,所以 f 在此区间上的最小值与最大值分别是 0 与 $\frac{3}{8}$.至于在区间 $[1,2]$ 上,按照平均值不等式

$$\begin{aligned}0\leqslant f(x)&=\frac{1}{2}(2x-2)(2-x)^2\\&\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2x-2+4-2x}{3}\right)^3\\&=\frac{4}{27}<\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

可见 f 在 $\left[0,\frac{5}{2}\right]$ 上最小值是 -4(在 $x=0$ 处取到).最大值是 $\frac{3}{8}$(在 $x=\frac{5}{2}$ 处取到),见图3-9. □

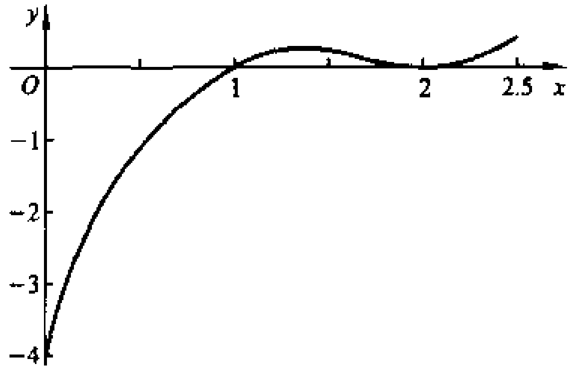

图 3－9

例 4 计划修建一条水渠，它的横断面是彼此全同的等腰梯形．设这梯形的底边与侧边的长等于常数 b(图 3－10)．为了获得最大的流量，应当使横断面的面积尽可能地大，问这时水渠应当有怎样的坡度？

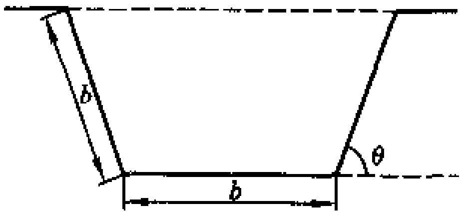

图 3－10

解 坡度可以通过图 3－10 中的角 θ 来刻画．因为这梯形的上底 $=b+2b\cos\theta$，高 $=b\sin\theta$，从面梯形的面积为

$$f(\theta)=b^2(1+\cos\theta)\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

令 $f'(\theta)=0$ 以求出驻点，得到

$$(1+\cos\theta)\cos\theta=1-\cos^2\theta.$$

解之，得 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$．由于 $f(0)=f(\pi)=0$，但

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{3}b^2>0,$$

所以坡度为 $180°-60°=120°$时，给出最大的断面面积．

仅仅利用平均值不等式的初等解法更为简便，考虑$\left(\dfrac{f}{b^2}\right)^2$，我们有

$$(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta=\frac{1}{3}(3-3\cos\theta)(1+\cos\theta)^3\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^4,$$

式中等号当且只当

$$3-3\cos\theta=1+\cos\theta$$

时，即 $\cos\theta=\frac{1}{2}$ 时，亦即 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时成立. □

例 5　求下列 $n+1$ 个多项式

$$x^i(1-x)^{n-i},i=0,1,\cdots,n,$$

在 $[0,1]$ 上的最小值与最大值.

解　很明显，当 $x\in[0,1]$ 时，我们有

$$0\leqslant x^i(1-x)^{n-i}\leqslant 1,i=0,1,\cdots,n.$$

当 $i=0$ 时，多项式为 $(1-x)^n$，这是一个严格递减的函数，所以 $x=0$ 时函数取得最大值 1，$x=1$ 时取得最小值 0. 当 $i=n$ 时，x^n 是严格递增的，最小值 0 与最大值 1 分别在 $x=0$ 与 $x=1$ 取到.

当 $i=1,2,\cdots,n-1$ 时，$x^i(1-x)^{n-i}$ 在 $x=0$ 与 $x=1$ 处取值为 0，这就是它们的最小值. 最大值在 $(0,1)$ 内达到. 求驻点，令

$$\begin{aligned}(x^i(1-x)^{n-i})'&=ix^{i-1}(1-x)^{n-i}-(n-i)x^i(1-x)^{n-i-1}\\&=x^{i-1}(1-x)^{n-i-1}(i-nx)=0,\end{aligned}$$

得惟一的驻点 $x=\frac{i}{n}(1\leqslant i\leqslant n-1)$，这也是最大值点. 所以最大值等于

$$\frac{i^i(n-i)^{n-i}}{n^n},i=1,2,\cdots,n-1.\quad\square$$

这个问题同样也可以用初等方法来解. 利用算术平均 - 几何平均不等式，可得

$$\begin{aligned}(n-i)^i i^{n-i}x^i(1-x)^{n-i}&=((n-i)x)^i(i(1-x))^{n-i}\\&\leqslant\left(\frac{i(n-i)x+i(n-i)(1-x)}{n}\right)^n=\left(\frac{i(n-i)}{n}\right)^n,\end{aligned}$$

因此

$$x^i(1-x)^{n-i}\leqslant\frac{i^i(n-i)^{n-i}}{n^n},$$

式中等号当且只当 $(n-i)x=i(1-x)$，即 $x=\frac{i}{n}$ 时成立.

光学中 Fermat“光行最速原理”说的是：光在传播时，走的总是最节省时间的路线. 所以，在相同的均匀介质中，光按直线行进，在下面的例题中，我们从 Fermat 原理出发，推导出光的折射定律.

例 6　设有两种均匀的介质，它们以平面作为分界面. 在第一种介质中有一点 A，在第二种介质中有一点 B. 如果有一束光从点 A 射向点 B，问这束光走怎样的路线？

解　这个问题完全可以放在平面上来考虑. 设两种介质的分界线是水平的

直线,直线上有一点 P,光线从 A 出发经点 P 折射到 B(图 3-11).设 AP 与分界线的夹角为 α,BP 与分界线的夹角为 β(这两个角不相邻).点 A 与 B 在分界线上的正投影分别为 A_1,B_1.若令 $d=A_1B_1$,$h=AA_1$,$k=BB_1$.并设 $A_1P=x$,那么 $B_1P=d-x$.于是

$$AP=\sqrt{h^2+x^2},BP=\sqrt{k^2+(d-x)^2}.$$

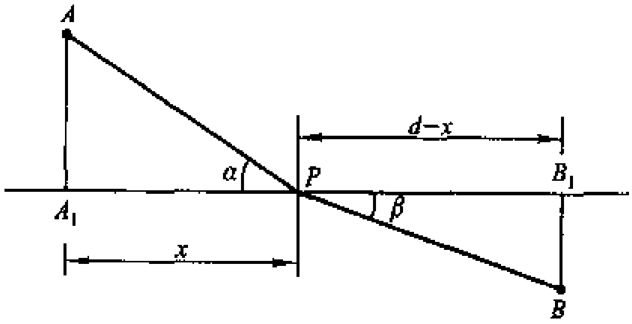

图 3-11

设在这两种介质中光的速度分别为 a 和 b,那么光束从 A 经 P 折射到 B 所花费的时间是

$$T(x)=\frac{1}{a}\sqrt{h^2+x^2}+\frac{1}{b}\sqrt{k^2+(d-x)^2}.$$

我们来求函数 T 的最小值.求导得

$$T'(x)=\frac{x}{a\sqrt{h^2+x^2}}-\frac{d-x}{b\sqrt{k^2+(d-x)^2}},$$

$$T''(x)=\frac{h^2}{a(h^2+x^2)^{3/2}}+\frac{k^2}{b(k^2+(d-x)^2)^{3/2}}.$$

因为 $T'(0)<0$,$T'(d)>0$,所以存在一点 $x_0\in(0,d)$ 使 $T'(x_0)=0$.又因 $T''>0$,知 T' 是严格递增函数,所以 T 的驻点 x_0 是惟一的,在 x_0 处 T 取得最小值.点 x_0 满足

$$\frac{x_0}{a\sqrt{h^2+x_0^2}}=\frac{d-x_0}{b\sqrt{k^2+(d-x_0)^2}},$$

即

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b},$$

这正是著名的光的折射定律. □

十分有趣的是,从光的折射定律出发,也可以推导出 Fermat 的光行最速原理.而且,用初等数学就可以证明.如图 3-12 所标注的那样,$BC<BD$,$\alpha=\angle ACD$,$\beta=\pi-\angle BCD$.自 D 向直线 AC,BC 作垂线,垂足分别记为 P,Q,则有

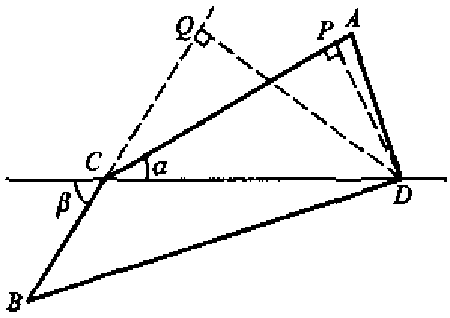

图 3-12

$$AC-AD<AC-AD\cos\angle A=AC-AP=CP,$$
$$BD-BC>BD\cos\angle B-BC=BQ-BC=CQ.$$

因此

$$\frac{AC-AD}{\cos\alpha}<\frac{CP}{\cos\alpha}=CD=\frac{CQ}{\cos\beta}<\frac{BD-BC}{\cos\beta}.$$

这也就是

$$\frac{AC}{\cos\alpha}+\frac{BC}{\cos\beta}<\frac{AD}{\cos\alpha}+\frac{BD}{\cos\beta}.$$

设 a,b 分别是光在两种介质中的速度.依折射定律,有

$$\cos\alpha : a=\cos\beta : b,$$

从而不等式变为

$$\frac{AC}{a}+\frac{BC}{b}<\frac{AD}{a}+\frac{BD}{b},$$

这正是光行最速原理.

3. 凸性

设函数 f 在区间 I 上有定义.考察 f 的图像 $y=f(x)$,$x\in I$.它是展布在 I 上的一段曲线.过曲线上的任何不同的两点作的直线段,称为曲线过这两点的**弦**.如果曲线上任何弦都不落在曲线 $y=f(x)$ 在此弦的两个端点之间那一部分的下方,则函数 f 叫做 I 上的**凸函数**(convex functions),也可以说函数 f 在 I 上是**凸的**.图 3-13 是凸函数图像的例子.

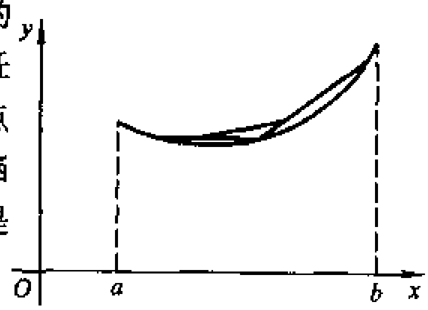

图 3-13

现在,我们要把上述的几何描述用解析式子表示出来.设 $x_1,x_2\in I$,且 $x_1<x_2$.任意取定 $x\in(x_1,x_2)$,见图 3.14,令

$$t=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

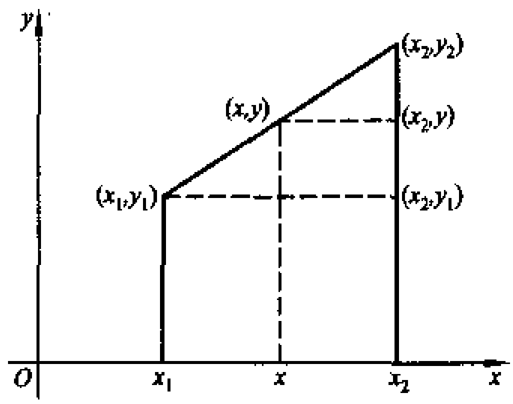

图 3-14

由此解出

$$x=(1-t)x_1+tx_2,$$

这里 $t\in(0,1)$. 在由两点 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2) 所决定的直线段上,取点 (x,y). 在由三点 (x_1,y_1), (x_2,y_1), (x_2,y_2) 所决定的直角三角形上,由相似关系可知

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=t,$$

可以得出 $y=(1-t)y_1+ty_2$, 这里 $t\in(0,1)$. 设两点 $(x_1,f(x_1))$ 与 $(x_2,f(x_2))$ 决定一条弦,那么前述的几何定义可以表示为

$$f((1-t)x_1+tx_2)\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2),$$

对一切 $t\in(0,1)$ 成立.

为了表达式的对称性,我们设 $\lambda_1=1-t$, $\lambda_2=t$, 于是 $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, 且 $\lambda_1+\lambda_2=1$. 这样,我们可以给出凸函数的下述定义.

定义 3.6 设函数 f 在区间 I 上有定义,如果对任何 $x_1,x_2\in I$ 但 $x_1\neq x_2$, 和任意的 $\lambda_1,\lambda_2>0$ 且 $\lambda_1+\lambda_2=1$, 都有

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2),$$

我们称 f 为 I 上的**凸函数**. 如果上述不等式对任何 $x_1\neq x_2$ 及 $\lambda_1,\lambda_2>0$, 且 $\lambda_1+\lambda_2=1$ 总是成立着不等号,我们就说 f 在 I 上是**严格凸函数**.

我们首先证明下述定理:

定理 3.17 设 f 在区间 I 上是凸函数,则对于任何 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in I$ 和

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n>0,\text{且 }\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1,$$

都有

$$f\Big(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^n\lambda_if(x_i). \tag{1}$$

如果 f 是 I 上的严格凸函数，当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全相等时有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)<\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i). \tag{2}$$

证明　用数学归纳法.当 $n=2$ 时，这正是凸函数和严格凸函数的定义.设 $n=k\geqslant 2$ 时命题成立，我们来证 $n=k+1$ 时命题也成立.设有 $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}\in I$；$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{k+1}>0$，并且

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{k+1}=1.$$

令

$$\mu_i=\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}},i=1,2,\cdots,k,$$

易见诸 $\mu_i>0$ 且 $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k=1$.这时还有

$$\mu_1x_1+\mu_2x_2+\cdots+\mu_kx_k\in I.$$

于是

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i x_i\right)&=f\left((1-\lambda_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\mu_i x_i+\lambda_{k+1}x_{k+1}\right)\\
&\leqslant(1-\lambda_{k+1})f\left(\sum_{i=1}^{k}\mu_i x_i\right)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})\\
&\leqslant(1-\lambda_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\mu_i f(x_i)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})\\
&=\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i f(x_i).
\end{aligned}$$

因此，我们已经证明：当 f 为 I 上的凸函数时，对任何 $n\in\mathbf{N}^*$，不等式(1)成立.

再设 f 是 I 上的严格的凸函数，并且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全相等.我们重新审查归纳证明.当 $n=2$ 时，x_1,x_2 不全相等就是 $x_1\neq x_2$，按定义，严格的不等号成立.假设 $n=k$ 时，严格的不等号成立.再设 $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}$ 不全相等.如果其中 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 不全相等，那么上述归纳法中最后的那个不等号应当是严格的；如果 $x_1=\cdots=x_k\neq x_{k+1}$，这时

$$\sum_{i=1}^{k}\mu_i x_i=x_1\sum_{i=1}^{k}\mu_i=x_1\neq x_{k+1},$$

这时归纳过程的第一个不等号就应当是严格的.总之，不等式(2)对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立.　□

定理 3.18　设 f 在区间 I 上是凸函数，则对任何 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in I$ 和任意的正数 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，有不等式

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}\beta_i}\right)\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}\beta_i}. \tag{3}$$

如果 f 是严格凸的,那么当 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in I$ 不全相等时,(3)式中成立着严格的不等号.

证明 只需令

$$\lambda_i=\frac{\beta_i}{\sum_{j=1}^{n}\beta_j},\ i=1,2,\cdots,n,$$

由定理 3.17 便推出本定理. □

人们通常把(1)与(3)称为 Jensen 不等式.

定理 3.19 函数 f 在区间 I 上是凸函数,当且仅当对任何 $(x_1,x_2)\subset I$ 及任何 $x\in(x_1,x_2)$,有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}. \tag{4}$$

f 是 I 上的严格凸函数,当且仅当(4)中出现的都是严格的不等号.

证明 我们有恒等式

$$x=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2.$$

当 $x\in(x_1,x_2)$ 时,有

$$\lambda_1=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}>0,\lambda_2=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}>0,$$

且 $\lambda_1+\lambda_2=1$. 由凸性的定义,可知

$$f(x)=f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2). \tag{5}$$

将 $f(x)$ 改写成

$$f(x)=\lambda_1f(x)+\lambda_2f(x)$$

之后代入(5),得到

$$\lambda_1(f(x)-f(x_1))\leqslant\lambda_2(f(x_2)-f(x)).$$

用 $\lambda_1\lambda_2$ 同除上式双方,得到

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}. \tag{6}$$

现在,我们需要一个初等的结果:如果 $b>0,d>0$,且 $\frac{a}{b}\leqslant\frac{c}{d}$,那么我们有

$$\frac{a}{b}\leqslant\frac{a+c}{b+d}\leqslant\frac{c}{d}.$$

这一事实的证明只需要直截了当的计算.令

$$a=f(x)-f(x_1),c=f(x_2)-f(x).$$

$$b=x-x_1>0,d=x_2-x>0.$$

利用已知的(6)式,立即可得出不等式(4).如果 f 是严格的凸函数,那么(4)中出现的都是严格的不等号.必要性到此证完.

再证充分性.如果(4)成立,自然(6)也成立.从(6)开始,把上述的过程反推回去,可得出(5)式,这正好是 f 在 I 上为凸函数(或严格凸函数)的定义. □

观察一下这个定理的几何意义是有帮助的.在图 3-15 中,画出了曲线 $y=f(x)$的三条弦.它们组成了一个三角形,不等式(4)的几何表示是

$$\overline{P_1P}\text{的斜率}\leqslant\overline{P_1P_2}\text{的斜率}\leqslant\overline{PP_2}\text{的斜率}.$$

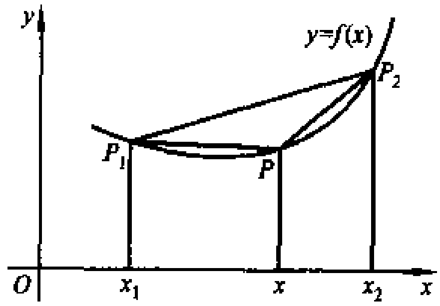

图 3-15

这正表示曲线向下凸.

在函数 f 存在着导数f'的情况下,判断 f 的凸性将变得比较容易,因为我们有

定理 3.20 设 f 在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可导,则 f 在$[a,b]$上为凸函数(严格凸函数)的一个必要充分条件是 f'在(a,b)上递增(严格递增).

证明 先证条件是必要的.设$(x_1,x_2)\subset(a,b)$.只要 x 与x'满足$x_1<x<x'<x_2$,由定理 3.19 可知

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x')}{x_2-x'}.$$

在上式中令 $x\to x_1+,x'\to x_2-$,得

$$f'(x_1)\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant f'(x_2).$$

在 f 是严格凸函数的情形,我们取一点 x^* 满足 $x_1<x^*<x_2$,从而得出

$$f'(x_1)\leqslant\frac{f(x^*)-f(x_1)}{x^*-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x^*)}{x_2-x^*}\leqslant f'(x_2).$$

这样就得出了严格的不等式 $f'(x_1)<f'(x_2)$，必要性证完.

再证充分性.设 f' 在 (a,b) 上递增.对任何 $x\in(x_1,x_2)$，由 Lagrange 中值定理，可知存在 $\xi\in(x_1,x)$ 与 $\eta\in(x,x_2)$，使得

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(\xi),$$

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=f'(\eta).$$

因为 $\xi<x<\eta$，所以 $f'(\xi)\leqslant f'(\eta)$.从而有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

利用定理 3.19，可知 f 在 $[a,b]$ 上为凸函数.容易看出，当 f' 严格递增时，$f'(\xi)<f'(\eta)$.上述不等式中成立着严格的不等号，从而 f 在 $[a,b]$ 上是严格凸的函数. □

当 f 在 (a,b) 内有二阶导数时，我们有下列应用起来更方便的定理.

定理 3.21 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，f 在 (a,b) 内有二阶导数，则 f 在 $[a,b]$ 上为凸函数的必要充分条件是 $f''\geqslant 0$ 在 (a,b) 内成立；而 f 在 $[a,b]$ 上为严格凸函数的必要充分条件是 $f''\geqslant 0$ 在 (a,b) 内成立并且在 (a,b) 的任何开的子区间内 f'' 不恒等于 0.

证明 第一个结论，可由定理 3.11 与定理 3.20 得出；第二个结论，可由定理 3.14 与定理 3.20 推出. □

对具体的凸函数使用 Jensen 不等式，可以得出许许多多不等式，这是证明与构造不等式的一种常用的方法.

例 7 证明"算术平均 - 几何平均不等式"：对任何正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有

$$(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\tag{7}$$

式中等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

证明 存在着惟一的 y_i 使 $x_i=\mathrm{e}^{y_i}$，$i=1,2,\cdots,n$.经过这样的代换之后，原不等式变为

$$\mathrm{e}^{(y_1+y_2+\cdots+y_n)/n}\leqslant\frac{\mathrm{e}^{y_1}+\mathrm{e}^{y_2}+\cdots+\mathrm{e}^{y_n}}{n}.\tag{8}$$

如果能证明函数 e^t 是 $\mathbf{R}$ 上的凸函数，由 Jensen 不等式可知上式成立；而 e^t 的严格凸性由 $(\mathrm{e}^t)''=\mathrm{e}^t>0$ 所保证，(8)中的等号当且只当 $y_1=y_2=\cdots=y_n$ 时成立.由此可知，不等式(7)成立，并且式中的等号只有当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时才出现.

□

例 8 对任何正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，证明不等式

$$\frac{x_1x_2\cdots x_n}{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^n}\leqslant\frac{(1+x_1)\cdots(1+x_n)}{(n+x_1+x_2+\cdots+x_n)^n},$$

并指出等号成立的条件.

证明 将不等式变形为

$$\frac{x_1x_2\cdots x_n}{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)}\leqslant\left(\frac{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{1+\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}\right)^n.$$

再取对数,得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i}{1+x_i}\right)\leqslant\ln\left(\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{1+\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\right).$$

若令 $f(x)=\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$,则上式可以写成

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\leqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right).$$

因此,只需证明 $-f(x)$在$(0,+\infty)$是凸函数,便得出欲证的不等式.求导,得出

$$f'(x)=\frac{1}{x(1+x)},$$

$$f''(x)=-\frac{1+2x}{x^2(1+x)^2},$$

可见 $-f$ 在$(0,+\infty)$上是严格的凸函数,这样就证得了原不等式,式中的等号当且只当诸 x_i 都相等时成立. □

练习题 3.5

1. 研究下列函数在指定区间内的增减性:

(1) $f(x)=\tan x,|x|<\frac{\pi}{2}$;

(2) $f(x)=\arctan x-x,x\in\mathbf{R}$.

2. 证明不等式:

(1) $x(x-\arctan x)>0$,当 $x\neq0$ 时;

(2) $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$,当 $x>0$ 时;

(3) $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$,当 $x>0$ 时;

(4) $\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$，当 $x>0$ 时.

3. 证明不等式：

(1) 当 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时，有

$$\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1};$$

(2) 当 $x,y>0$ 且 $\beta>\alpha>0$ 时，有

$$(x^\alpha+y^\alpha)^{1/\alpha}>(x^\beta+y^\beta)^{1/\beta};$$

(3) 设 $p\geqslant 2$，当 $x\in[0,1]$ 时，有

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^p+\left(\frac{1-x}{2}\right)^p\leqslant\frac{1}{2}(1+x^p).$$

4. 设函数 f 在 $[0,1]$ 上有三阶导函数，且 $f(0)=f(1)=0$，设 $F(x)=x^2f(x)$，求证：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F'''(\xi)=0$.

5. 设函数 f 在区间 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$ 且 f' 严格递增. 求证：$\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 也严格递增.

6. 设函数 f 在 $\mathbf{R}$ 上有界且 $f''\geqslant 0$，证明：f 为常值函数.

7. 设函数 f 和 g 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且当 $x>a$ 时 $|f'(x)|\leqslant g'(x)$. 证明：当 $x\geqslant a$ 时

$$|f(x)-f(a)|\leqslant g(x)-g(a).$$

8. 证明：当 $x>0$ 且 $x\neq 1$ 时，有

$$(1-x)(x^2e^{1/x}-e^x)>0.$$

9. 求下列函数的最大值和最小值：

(1) $f(x)=x^4-2x^2+5$，$|x|\leqslant 2$；

(2) $f(x)=\sin(2x)-x$，$|x|\leqslant\frac{\pi}{2}$；

(3) $f(x)=x\ln x$，$x>0$；

(4) $f(x)=x^2-3x+2$，$x\in\mathbf{R}$；

(5) $f(x)=|x^2-3x+2|$，$|x|\leqslant 10$；

(6) $f(x)=\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$，$0\leqslant x\leqslant 1$.

10. 重量为 W 的物体放在一粗糙的平面上，施加一力克服摩擦，使之在平面上滑动. 设摩擦系数为 μ，问该力应与水平面成何角度，方可使力最小？

11. 内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$、边平行于坐标轴的矩形，何时面积最大？

12. 体积一定的圆锥形帐篷，高与底半径之比如何时，表面积最小？

13. 从半径为 R 的圆纸片上剪去一个扇形，做成一个圆锥形漏斗，如何选取扇形的顶角，可使漏斗的容积最大？

14. 设 $0<a<b\leqslant 2a$，在区间 $[a,b]$ 上讨论双曲线 $xy=1$. 在该曲线每一点上作切线，它与横轴及两平行直线 $x=a$, $x=b$ 围成一个梯形. 问这切线位于何处，才能使梯形有最大面积？

15. 对某量做了 n 次测量，得到 n 个数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，试求出一数 x^* 使函数 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)^2$ 在 x^* 处取得最小值.

16. 求出使得不等式 $a^x \geqslant x^a\ (x>0)$ 成立的一切正数 a.

17. 函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，导函数 f' 在 (a,b) 内递增，求证：对任何 $x\in[a,b]$，有

$$(b-x)f(a)+(x-a)f(b)\geqslant(b-a)f(x).$$

18. 判断函数 f 的凸性：

(1) $f(x)=x^\mu$，其中 $\mu\geqslant 1$, $x\geqslant 0$；

(2) $f(x)=a^x$，其中 $a>0$, $x\in\mathbf{R}$；

(3) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x>0$；

(4) $f(x)=x\ln x$, $x>0$；

(5) $f(x)=-\sin x$, $x\in[0,\pi)$.

19. 证明下列不等式，并指明式中等号成立的条件：

(1) $a^{(x_1+\cdots+x_n)/n}\leqslant\dfrac{1}{n}(a^{x_1}+\cdots+a^{x_n})$，其中 $a>0$ 但 $a\neq 1$；

(2) $\left(\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^p\leqslant\dfrac{1}{n}(x_1^p+\cdots+x_n^p)$，其中 $p>1$；

(3) 当 $x_1, x_2, \cdots, x_n>0$ 时

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant(x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_n^{x_n})^{1/(x_1+x_2+\cdots+x_n)}.$$

(4) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n>0$ 且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$，则对一切 $x_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 有

$$x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i.$$

20. 证明：同一区间上的两上凸函数之和仍为凸函数.

21. 设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 为凸函数，如果有 $c\in(a,b)$ 使得 $f(a)=f(c)=f(b)$，求证：f 为常值函数.

22. 设 $a<b<c<d$. 求证：若 f 在 $[a,c]$ 上及 $[b,d]$ 上为凸函数，那么 f 在 $[a,d]$ 上也是凸函数.

23. 设函数 f 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二次可导，$f(a)=f(b)=0$，且存在 $c\in(a,b)$使 $f(c)>0$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$使得 $f''(\xi)<0$.

问题 3.5

1. 设 I 是一个开区间，f 是 I 上的凸函数，求证：
   (1) 在 I 上存在递增的左导函数 f'_- 和右导函数 f'_+，并且 $f'_-\leqslant f'_+$ 对 $x\in I$ 成立；
   (2) 设 $x\in I$，若 f'_+ 在点 x 处左连续或 f'_- 在点 x 处右连续，则 f 在 x 可导；
   (3) 若$[a,b]\subset I$，则当 $x_1,x_2\in[a,b]$时有
   $$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant M|x_2-x_1|,$$
   其中 M 为常数，所以说凸函数总是连续的.
2. 设 I 为一开区间，函数 f 在 I 上为凸函数的一个必要充分条件是：对每一点 $c\in I$ 都存在一数 a 使得
   $$f(x)\geqslant a(x-c)+f(c)$$
   对一切 $x\in I$ 成立. 对此作出几何解释.
3. 设函数 f 在区间 I 上可导，则 f 在 I 上为凸函数的一个必要充分条件是：图像 $G(f)$ 位于它的每一条切线的上方.
4. 设 $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$，且对任何 $x\in[0,+\infty)$有 $x=f(x)e^{f(x)}$，求证：
   (1) f 是严格递增的；
   (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$；
   (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\ln x}=1$.
5. 设 p 是一多项式，如果
   $$p'''(x)-p''(x)-p'(x)+p(x)\geqslant 0$$
   在$(-\infty,+\infty)$上成立，求证：$p\geqslant 0$.
6. 方阵 $A=(a_{ij})$，$i,j=1,2,\cdots,n$，其中一切元素均为正数，其各行的和以及各列的和均为 1. 设 x 是一 n 维列向量，各分量均为正数. 令 $y=Ax$，并设 x 与 y 的分量分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 及 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，求证：$y_1y_2\cdots y_n\geqslant x_1x_2\cdots x_n$.
7. 微分方程
   $$\begin{cases}y''+p(x)y'+q(x)y=r(x),x\in(a,b),\\ y(a)=A,\\ y(b)=B,\end{cases}$$
   其中 $q(x)<0$，A,B 为常数. 如果这个方程在$[a,b]$上有连续的解，则解必

是惟一的.

8. 令 $P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}, n\in\mathbf{N}^*$. 求证:

(1) 当 $x<0$ 时

$$P_{2n}(x)>e^x>P_{2n+1}(x);$$

(2) 当 $x>0$ 时

$$e^x>P_n(x)\geqslant\left(1+\frac{x}{n}\right)^n;$$

(3) 对一切实数 x,有

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

9. 设 $f\in C[a,b]$,定义函数

$$D^2f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$

(假设对任何 $x\in(a,b)$,上述极限均存在). 若 $D^2f(x)=0, x\in(a,b)$,求证:$f(x)=c_1x+c_2$,其中 c_1,c_2 为常数.

10. 对任意正整数 n,证明当 $x\in(0,\pi)$ 时恒有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}>0.$$

11. (Darboux 定理) 设 f 在区间 $[a,b]$ 上可导,求证

(1) 导函数 f' 可以取到 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的一切数值;

(2) f' 无第一类间断点.

§3.6 L'Hospital 法则

设函数 f 与 g 在 x_0 的近旁(可能除 x_0 一点之外)有定义,又设当 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to l$,但是 $g(x)\to 0$,因此就不能直接用“商的极限等于极限的商”这一定理来计算 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$;而且,我们还知道这一极限存在时必须有 $l=0$,这是因为

$$\begin{aligned}l&=\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)\frac{f(x)}{g(x)}\\&=\lim_{x\to x_0}g(x)\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0.\end{aligned}$$

这时,我们面临着在条件

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$$

之下,极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

的计算问题.我们把这种极限类型记作"$\frac{0}{0}$型".请特别注意,$\frac{0}{0}$仅仅是一个代表某种极限类型的记号,决不意味着"0 可以用作除数".回忆第二章§2.8 中的记号"1^∞型",就不会对当前的记号感到奇怪.

应用 Cauchy 中值定理,可以容易地得到求$\frac{0}{0}$型极限的一种有效的办法.我们只对单边极限进行讨论,对于双边极限也将有同样的结果,因为这时可以化作左极限和右极限来考虑.

定理 3.22(L'Hospital) 设 f,g 在(a,b)有定义,并且 $g(x)\neq 0$ 对 $x\in(a,b)$成立,f,g 在(a,b)内可导.又设

$$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a+} g(x)=0.$$

在这些条件下,如果极限

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在(或为∞),那么便有

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证明 补充定义

$$f(a)=g(a)=0,$$

以保持 f,g 在$[a,b)$上的连续性.利用 Cauchy 中值定理,对 $x\in(a,b)$,有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

这里 $a<\xi<x$.由此可见,当 $x\to a+$时便有 $\xi\to a+$,因此

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\quad\square$$

如果上式中的最后一个极限仍是$\frac{0}{0}$型,那么在确信 f',g'仍满足定理的条件之后,便可得出

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

在需要的时候,这一过程可以再继续下去.

我们将通过例子看到,用 L'Hospital 法则来求$\frac{0}{0}$型的极限,的确是一种简单

有效的方法.人们几乎只需从事非常机械的求导计算.机械式的操作往往使人麻木,因此我们在这里提醒读者注意:在使用L'Hospital法则计算极限的时候,要检查定理的条件是否被满足,想到使用等价无穷小替换,并且把那些有确定的、非零的极限的因式及早地分离出来,这样做能够减少麻烦,提高效率.

例1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x(x+2)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x}=\frac{1}{2}\cdot 0=0.\quad\square$$

例2

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}.\quad\square$$

L'Hospital法则当$x\to+\infty$($-\infty$或∞)时也是成立的,因为我们有

定理3.23　设函数f,g在区间$(a,+\infty)$内可导,且$g(x)\neq 0$对$x\in(a,+\infty)$成立,并且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0,$$

那么当$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为$\infty$)时,便有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证明　作变换$x=\dfrac{1}{t}$.因此,$x\to+\infty$相当于$t\to 0+$.这时,我们有

$$\lim_{t\to 0+}f\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0+}g\left(\frac{1}{t}\right)=0.$$

依定理3.22可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0+}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\quad\square$$

如果在同一极限过程中,有

$$\lim f(x)=\infty,\lim g(x)=\infty,$$

这时称极限

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$$

为“$\frac{\infty}{\infty}$型”.对于这种类型的极限,自然也不能用“商的极限等于极限的商”这一定理,但是同样也有相应的 L'Hospital 法则.

定理 3.24 设函数 f 与 g 在 (a,b) 内可导,在这区间内 $g(x)\neq 0$,且

$$\lim_{x\to a+} g(x)=\infty,$$

如果极限 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为∞),那么

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证明 令

$$l=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1}$$

我们只对 l 为有限数的情形来证明本定理,而 $l=-\infty$ 或 $l=+\infty$ 时,证明是类似的.由于(1),对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在一个 $\delta>0$,当 $x\in(a,a+\delta)$ 时

$$l-\varepsilon<\frac{f'(x)}{g'(x)}<l+\varepsilon.$$

因此,对 $(x,c)\subset(a,a+\delta)$,依 Cauchy 中值定理,必存在 $\xi\in(x,c)$,使得

$$l-\varepsilon<\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}<l+\varepsilon.$$

但因

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(c)}{g(x)}\right)\left(1-\frac{g(c)}{g(x)}\right)^{-1},$$

固定 c,对 $c\to a+$ 取上极限,得

$$\limsup_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant l+\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$,得到

$$\limsup_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant l.$$

同样的技巧还可以得出

$$\liminf_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant l.$$

这也就是

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=l. \quad \square$$

在这个证明中,用到了函数的上、下极限,因此十分简洁.应当强调指出的是,本定理省去了通常还要加上的另一条件:

$$\lim_{x\to a+} f(x)=\infty.$$

极限 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的存在性是十分必要的. 如果它不存在, 那就谈不上 L'Hospital 法则. 例如

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1+0=1.$$

但是

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}(1+\cos x)$$

不存在, 不符合法则的先决条件.

利用定理 3.24, 可以用统一的方法对 §2.6 中提到的下面几个无穷大的量级作一比较. 当 $x\to+\infty$ 时, 下列函数

$$\ln x,\ x^{\mu}(\mu>0),\ e^{x},\ x^{x}$$

都是无穷大. 可以证明: 在上述的顺序中, 后一个是比前一个更高级的无穷大. 事实上.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\mu}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\frac{1}{\mu x^{\mu-1}}=\frac{1}{\mu}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\mu}}=0.$$

设正整数 n 满足 $n-1<\mu\leqslant n$, 于是连续 n 次使用 L'Hospital 法则之后, 可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu}}{e^{x}}=\mu\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu-1}}{e^{x}}=\mu(\mu-1)\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu-2}}{e^{x}}$$

$$=\cdots=\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu-n}}{e^{x}}=0;$$

此外, 还有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{x(1-\ln x)}=0,$$

得到这一个等式时, 根本不需要用 L'Hospital 法则.

定理 3.24 中只要求分母是无穷大量, 这对处理某些问题带来了方便.

例 3 设 f 在 $(a,+\infty)$ 中可导, 如果对 $\alpha>0$,

$$\lim_{x\to+\infty}(\alpha f(x)+xf'(x))=\beta,$$

那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\beta}{\alpha}$.

证明 因为 $\alpha>0$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}=+\infty$, 故由定理 3.24 即得

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}f(x)}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}f(x)+x^{\alpha}f'(x)}{\alpha x^{\alpha-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{x}{\alpha}f'(x)\right)=\frac{\beta}{\alpha}.\quad\square$$

在计算极限时，有时也会遇到“$0\cdot\infty$型”、“$\infty-\infty$型”、“0^0 型”、“∞^0 型”等情况．这些记号的意义不难由它们的外形来推断．只要经过适当的变换，最终都可以化为“$\frac{0}{0}$型”或“$\frac{\infty}{\infty}$型”的情况，使用 L'Hospital 法则去解决．

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\mu}\ln x$，其中 $\mu>0$．

解 这是“$0\cdot\infty$型”，但可以变化为“$\frac{\infty}{\infty}$型”．

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-\mu}}=-\frac{1}{\mu}\lim_{x\to 0+}\frac{x^{-1}}{x^{-\mu-1}}=-\frac{1}{\mu}\lim_{x\to 0+}x^{\mu}=0. \quad \square$$

例 5 求极限 $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sec x-\tan x)$．

解 这是“$\infty-\infty$型”，但可以变化为“$\frac{0}{0}$型”．

$$\lim_{x\to\pi/2}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x}=0. \quad \square$$

例 6 求极限 $\lim\limits_{x\to 0+}(\sin x)^x$．

解 这是“0^0 型”．由于

$$(\sin x)^x=e^{x\ln\sin x},$$

我们只需求出 $\lim\limits_{x\to 0+}x\ln\sin x$，而这已是“$0\cdot\infty$型”．由于

$$x\ln\sin x=x\ln x+x\ln\frac{\sin x}{x},$$

利用例 4 的结果，可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}x\ln\sin x&=\lim_{x\to 0+}x\ln x+\lim_{x\to 0+}\ln\frac{\sin x}{x}\\&=0+0\cdot\ln 1=0.\end{aligned}$$

可见

$$\lim_{x\to 0+}(\sin x)^x=e^0=1. \quad \square$$

例 7 求极限 $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\tan x)^{\pi/2-x}$．

解 这是“∞^0 型”．作变换 $t=\frac{\pi}{2}-x$．所以，当 $x\to\frac{\pi}{2}-$ 时 $t\to 0+$，从而原极限变成

$$\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)^t=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{(\sin t)^t}=1,$$

这里利用了例 6 的结果． $\square$

练习题 3.6

1. 计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cot x-1}{x^2}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$;

(5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{x^3}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln(1-x)$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0+}x^x$;　　(8) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$;

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{a}{x}\right)^x$;　　(10) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;　　(12) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-e\right)$;

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$;　　(14) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$.

2. 设 f 在点 x 处有二阶导数,求证,

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

由此推出结论:若 f 是二阶可导的凸函数,必有 $f''\geqslant 0$.

3. 设 f 在 0 的某一邻域内有二阶连续导数,且 $f(0)=0$,定义 $g(0)=f'(0)$ 且当 $x\neq 0$ 时 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$. 求证:g 在这邻域内有连续的导函数.

4. 设 f 在 $(a,+\infty)$ 中可导,如果

$$\lim_{x\to +\infty}(f(x)+xf'(x)\ln x)=l,$$

证明 $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=l$.

§3.7 函数作图

在 §2.3 中曾经说过,表示函数有三种方法,即列表法、图示法和解析法(或公式法),并且说过,用图形来表示函数有直观、醒目的优点.从图形上看,函数的动态即它的递增、递减、正性、凸性将一览无遗.但是,用图形表示的函数不便于

作理论上和数值上的研究,所以人们常常偏爱用解析式表达的函数.不过,在许多场合,我们也希望将一个已有解析式的函数用图形表示出来,以便于直观地了解它的性态.这就产生了函数作图的需要.虽说当代的电子计算机在带有作图软件的环境中,能在顷刻之间相当准确地描绘出十分复杂的初等函数的图形,但是我们这里即将介绍的"函数作图",并没有失去它的价值.这是因为:第一,当我们手头上没有计算机的时候,有了应急的办法;第二,在许多场合我们并不刻意去追求数值的准确性,需要的是了解函数的几何形态,数值的精确性是第二位的要求.

一般来说,在作图之前,我们应当考虑下列三点:

1° 明确函数的定义域和值域,以界定函数图像的存在范围;

2° 函数是否具有对称性? 这又可以分为轴对称和中心对称.如果找到了对称轴或对称中心,将使我们的劳动减少一半.对称的部分可以用"复制"的方法得出;

3° 函数是否具有周期性? 对于周期函数,就只需作出它在一个周期之上的图形.

在定义 3.6 中,我们定义过凸函数和严格凸函数,但并未引进所谓"凹函数"和"严格凹函数"这些名词,而且今后也不使用这些名词.但是,在函数作图的时候,为了说话的方便,当 $-f$ 在某一个区间上为凸函数时,我们称 $y=f(x)$ 的图形在该区间上是"凹的",相应地也有图形为"严格凹的"这种说法.

定义 3.7 设函数 f 在 x_0 的两旁(包括 x_0 在内)有定义.在 x_0 的一侧图形 $y=f(x)$ 是严格凸的,另一侧是严格凹的,那么称 x_0 是 f 的一个**拐点**.

显然,当 f 在 x_0 的近旁有连续的二阶导数时,x_0 为拐点的必要条件是 $f''(x_0)=0$.不过,这不是拐点的充分条件.考察函数 $f(x)=x^4$,虽然这时有 $f''(0)=0$,但 $x=0$ 不是 f 的拐点,这是因为 $f''(x)=12x^2>0(x\neq0)$,所以 f 在 $\mathbf{R}$ 上是严格凸的.如果在 $f''(x_0)=0$ 并且 f'' 在 x_0 的一侧取正值,另一侧取负值时,可以断言 x_0 是 f 的(或图形 $y=f(x)$ 的)拐点.在拐点的近旁,曲线在拐点上的切线把曲线 $y=f(x)$ 分在它的两侧.这一观察对函数作图会有帮助.

为了使函数的几何形态尽可能地精确,还需要引进曲线的渐近线的概念.

定义 3.8 1° 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$,就称直线 $y=a$ 或 $y=b$ 为 $y=f(x)$ 的一条**水平渐近线**.

2° 如果 $\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=\pm\infty$,或 $\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=\pm\infty$,就称 $x=x_0$ 为 $y=f(x)$ 的一条**竖直渐近线**.

3° 如果有 $a\neq0$ 使得

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$,或 $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$,就称 $y=ax+b$ 为

$y=f(x)$的一条**斜渐近线**.

水平渐近线和竖直渐近线往往一眼就能看出来.例如 $y=0$ 是 $y=\frac{1}{1+x^2}$的一条水平渐近线,$x=\frac{\pi}{2}$和 $x=-\frac{\pi}{2}$是 $y=\tan x$ 的两条竖直渐近线.

如何求 $y=f(x)$的斜渐近线? 设 $y=ax+b$ 是 $y=f(x)$的一条斜渐近线,由于

$$0=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-(ax+b)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-a,$$

所以

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{1}$$

有了 a,便可从

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax) \tag{2}$$

求得 b.(1),(2)便是求斜渐近线的公式.

例1　求函数 $y=\frac{(1+x)^2}{4(1-x)}$的渐近线.

解　记 $f(x)=\frac{(1+x)^2}{4(1-x)}$,则显然有

$$\lim_{x\to1+}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to1-}f(x)=+\infty.$$

所以 $x=1$ 是 $y=f(x)$的一条竖直渐近线.由于

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}=\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(1+x)^2}{4x(1-x)}=-\frac{1}{4},$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\pm\infty}\left\{\frac{(1+x)^2}{4(1-x)}+\frac{x}{4}\right\}=-\frac{3}{4},$$

所以 $y=-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$是 $y=f(x)$的一条斜渐近线.　□

现在可以列出作图的大致步骤如下:

1°确定函数的定义域;

2°判定函数是否有奇偶性、周期性及其他的对称性;

3°确定函数的增减区间及极值点;

4°确定函数凹凸的区间及拐点;

5°确定函数是否有渐近线;

6°求出一些特殊点的值.

例2　作出多项式函数

$$f(x)=4x^3-3x$$

的图形

解 这是一个奇函数,所以只需在$[0,+\infty)$上讨论.求导得

$$f'(x)=12x^2-3, f''(x)=24x,$$

可知$x=\frac{1}{2}$是f在$[0,+\infty)$上的惟一驻点.实际上,$\frac{1}{2}$是最小值点,最小值是$f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$,其值域是$[-1,+\infty)$.函数$f$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上严格递减,当$x>\frac{1}{2}$时严格递增,在$[0,+\infty)$上严格凸.

把这些资料填在下表中:

x	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
f'	$-$	$+$
f''	$+$	$+$
f	↘凸	↗凸

根据上面的表格以及$f(0)=0$,$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$,便可画出$y=4x^3-3x$的图形了(见图3-16).

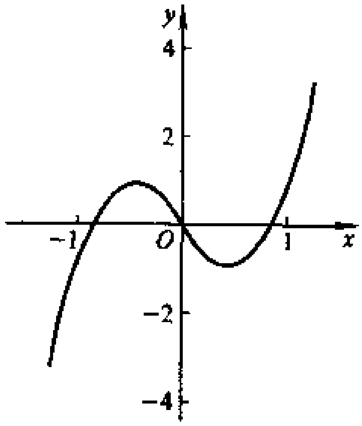

图3-16

例3 设函数

$$f(x)=(x-1)^2+2\ln x,$$

作出函数f的图形.

解 f的定义域是$x>0$,没有对称性和周期性.计算导数得

$$f'(x)=\frac{2}{x}\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)>0, x>0;$$

$$f''(x)=2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\begin{cases}>0, & 当\ x>1,\\ <0, & 当\ 0<x<1,\end{cases}$$

所以 $x=1$ 是拐点. 由 $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=-\infty$, $x=0$ 是一条竖直渐近线. 由 $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ 知道, f 没有斜渐近线. 根据 $f(1)=0$, $f'(1)=2$ 及下面的表:

x	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
f'	+	+
f''	−	+
f	↗凹	↗凸

即得 $y=f(x)$ 的图形如下(图 3-17):

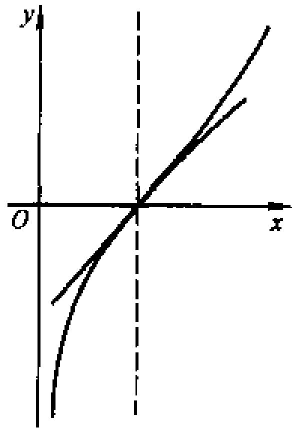

图 3-17

在例 3 中,我们只描绘了曲线上的一个点. 为什么只取一个点就基本上符合要求了呢? 那是因为我们并不在乎数值上的偏差,更重视的乃是函数的形态,是"神似". 当我们欣赏一个优秀的漫画家创作的某名人的漫画时,一看便知是何许人也,这就是"神似",这决不意味着漫画中五官配置的比例与真人的严格相等.

例 4 作函数 $y=\frac{(1+x)^2}{4(1-x)}$ 的图形.

解 记 $f(x)=\frac{(1+x)^2}{4(1-x)}$,它的定义域是 $(-\infty,1)$, $(1,+\infty)$. 计算导数:

$$f'(x)=\frac{(3-x)(1+x)}{4(1-x)^2},\quad f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

$x=3$ 和 $x=-1$ 是驻点. 根据 f' 和 f'' 作出下表:

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
f'	−	+	+	−
f''	+	+	−	−
f	↘凸	↗凸	↗凹	↘凹

又从例 1 知道,它有竖直渐近线 $x=1$ 和斜渐近线 $y=-\frac{1}{4}(x+3)$,再由 $f(-1)=0$, $f(3)=-2$ 可得图形如下(图 3-18):

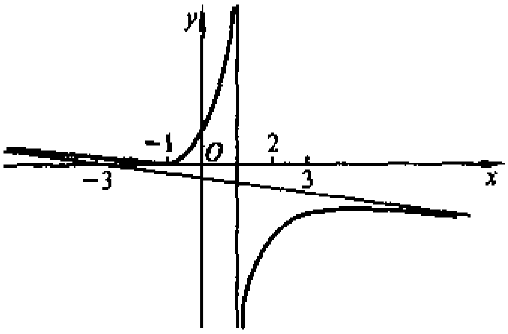

图 3-18

练习题 3.7

1. 画出下列曲线：

(1) $y=x^4-2x+10$;　　(2) $y=e^{-x^2}$;

(3) $y=\ln(1+x^2)$;　　(4) $y=x-\ln(1+x)$;

(5) $y=\dfrac{x}{1-x^2}$;　　(6) $y=x^2e^{-x}$.

第 4 章　一元微分学的顶峰

——Taylor 定理

在第 3 章里，Lagrange 中值定理可以说是其中最重要的定理，我们已经看到它的许多应用．在本章中，我们要把 Lagrange 定理作进一步的推广，得出所谓的 Taylor 定理．我们不想把话说得太绝对，但至少可以说：凡是用一元微分学中的定理、技巧能解决的问题，其中的大部分都可以用 Taylor 定理来解决．掌握了 Taylor 定理之后，回过头去看前面的那些理论，似乎一切都在你的掌握之中，使你有一种"会当凌绝顶，一览众山小"的意境．从这个意义上说"Taylor 定理是一元微分学的顶峰"，并不过分．

§4.1　函数的微分

设函数 $f:(a,b)\to\mathbf{R}$，回忆 f 在一点 $x_0\in(a,b)$ 可导的定义，那就是极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，通常记它为 $f'(x_0)$，由此推知

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)$$

当 $\Delta x\to 0$ 时是一个无穷小．或者说，当 $\Delta x\to 0$ 时，

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x). \tag{1}$$

此式的左边是函数 f 在点 x_0 处的一个改变量；右边是两项的和，其中第一项是自变量的改变量 Δx 的齐次线性函数，第二项当 $\Delta x\to 0$ 时是比 Δx 高级的无穷小．

当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，(1)的右边的第一项是与 Δx 同级的无穷小．与第二项相比，它占有更重的分量，或者说起着主要的作用，这一性质是设 f 在点 x_0 处可导的条件之下得出的．

我们作出如下的定义．

定义 4.1 设函数 f 在(a,b)内有定义,且 $x_0\in(a,b)$.如果存在一个常数 λ,使得

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\lambda\Delta x+o(\Delta x),\Delta x\to 0, \tag{2}$$

则称函数 f 在点 x_0 处**可微**;函数的改变量的线性主要部分 $\lambda\Delta x$ 称为 f 在 x_0 处的**微分**,记为 $\mathrm{d}f(x_0)$.

前面的推导表明,当 f 在点 x_0 处可导时,必在同一点可微.现在我们反过来提出这样的问题:如果 f 在点 x_0 处可微,在点 x_0 是否可导?那个线性主要部分的系数 λ 究竟是什么?

用 Δx 同除(2)式双方,得到

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lambda+o(1),$$

令 $\Delta x\to 0$,可得

$$\lambda=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

这表明 f 在点 x_0 处可导,而且 Δx 的系数只能是 f 在 x_0 处的导数.

我们证明了:对单变量函数来说,可导和可微是同一件事.在大多数场合,当我们说 f 在点 x_0 处"可微"时,往往是为了突出函数 f 具有(1)式所表达的性质.我们还证明了:

$$\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\Delta x. \tag{3}$$

公式(3)也有不尽如人意之处,因为它的右边出现自变量的改变量 Δx,而左边没有 Δx 的痕迹.虽然如此,在实际操作中并不会造成混乱.例如说,在某一问题中,我们用 h 来表示自变量的改变量,那么这时就应当写成 $\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)h$,等等.如果函数 f 在(a,b)内可微,那么 $\mathrm{d}f(x)=f'(x)\Delta x$ 对一切 $x\in(a,b)$成立.对特殊的函数 $f(x)=x$,这时

$$\mathrm{d}x=(x)'\Delta x=\Delta x.$$

这表明,当 x 是自变量的时候,我们有 $\mathrm{d}x=\Delta x$,即是说它的改变量就等于自身的微分,这样一来,(3)式可以改写成

$$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

现在,从几何上来看看微分的意义.作曲线 $y=f(x)$的图形,以及曲线在$(x_0,f(x_0))$处的切线(图 4-1).图中的字母的意义是:

$P_0=(x_0,f(x_0))$,曲线上固定的点;

$P=(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$,曲线上与 P_0 邻近的点;

$Q=(x_0+\Delta x,f(x_0))$;

$T=(x_0+\Delta x,f(x_0)+f'(x_0)\Delta x)$,曲线在点 P_0 处的切线与直线 $x=x_0$

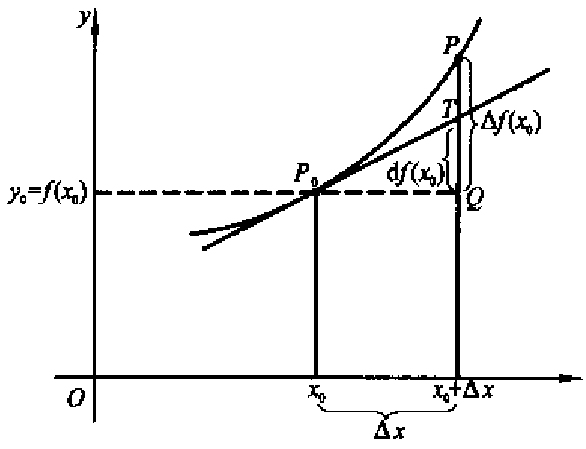

图 4－1

$+\Delta x$ 的交点.

由此可知,

$$QT = f'(x_0)\Delta x = \mathrm{d}f(x_0).$$

这里 QT 是带符号的线段.此式表明函数在一点处的微分,等于它的在该点处"切线函数"的改变量.此外,

$$TP = \Delta f(x_0) - \mathrm{d}f(x_0).$$

它是函数的改变量与函数的微分之差.当 $\Delta x \to 0$ 时,$|TP|$是比 $\Delta x = P_0Q$ 更高级的无穷小.这些事实,从图 4－1 中可以明显看到.

现在总结一下有关微分的一些事实.

1° 微分是 Δx 的一个齐次线性函数,它的系数是 $f'(x_0)$,这个线性函数的定义域是整个实数,即 $\Delta x \in (-\infty, +\infty)$;

2° 当 $\Delta x \to 0$ 时,微分与函数改变量的差别仅仅是比 Δx 高级的无穷小;

3° 微分的几何意义是在该点的切线函数的改变量.

如果把自变量的改变量直接写成 $x - x_0$,那么(1)式成为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),\ x \to x_0. \tag{5}$$

这个式子也可以作为 f 在 x_0 处可微的定义.性质 2°为我们提供了这样的数值应用:当$|x - x_0|$相当小时,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{6}$$

即函数值 $f(x)$可以近似地由(6)的右边的 x 的线性函数来代替.由于 $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$是在点$(x_0, f(x_0))$处曲线的切线方程,这表明在这一点的近旁,曲线 $y = f(x)$可以用直线(即该点的切线)来代替.看两个例子.

例 1　半径为 r 的圆,它的面积是 r 的函数:$f(r) = \pi r^2$.当半径从 r 变到 $r + h$ 时(这里 h 可以是负值),圆面积的改变量是

$$f(r+h)-f(r)=2\pi rh+\pi h^2. \tag{7}$$

这个数值的几何意义是:半径为 r 与半径为 $r+h$ 的两个同心圆所围成的圆环的面积(图 4-2).(7) 式的右边的第一项可以解释为一个矩形的面积,它的长是 $2\pi r$(即内圆周的周长),宽是 h,在这里设 $h>0$. 当 h 很小时,这矩形的面积可近似代替圆环的面积.所产生的误差是(7)式中的最后一项,用这一项可以来估计逼近的误差. □

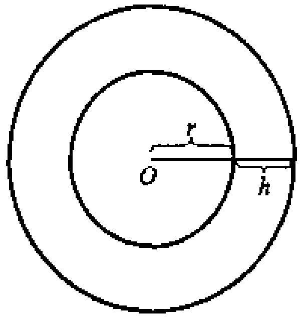

图 4-2

上例中出现的是一个十分简单的函数(r 的二次多项式),所以近似的误差是可以精确表达的,但对于一般情况,在我们当前这个学习阶段上,逼近的误差还难于估计.

例 2 计算 $\sin 30°5'$.

解 首先必须把其中角度的数据化成弧度.由于 $30°$ 等于 $\frac{\pi}{6}$,$5'$ 等于 0.001 454 4(弧度),所以

$$\begin{aligned}\sin 30°5' &= \sin\left(\frac{\pi}{6}+0.001\,454\,4\right)\\ &\approx \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+0.001\,454\,4\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0.001\,454\,4=0.501\,259\,5\cdots.\end{aligned}$$

计算器得出的结果是 0.501 259 1…,差别发生在小数点后的第七位上. □

但是,用这种方法来作近似计算,还是相当粗略的.我们说 $|x-x_0|$ 很小,问题是:多小才算"很小"? 此外,对这种"近似"所带来的误差没有可靠的控制.这些问题到§4.3 中将得到解答.

学会了求导运算,求微分就是轻而易举的事.这由以下的例子可以看出来.

例 3 求 $\mathrm{d}x^5$.

解 $\mathrm{d}x^5=(x^5)'\mathrm{d}x=5x^4\mathrm{d}x$. □

例 4 求 $\mathrm{d}e^{(x^2-1/x)}$.

解
$$\begin{aligned}\mathrm{d}e^{(x^2-1/x)} &= (e^{(x^2-1/x)})'\mathrm{d}x\\ &=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)'e^{(x^2-1/x)}\mathrm{d}x.\\ &=\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)e^{(x^2-1/x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$ □

一般地,关于函数四则运算的微分,有下列法则:

1° $\mathrm{d}(f\pm g)=\mathrm{d}f\pm\mathrm{d}g$;

$2°$ $\mathrm{d}(fg)=g\mathrm{d}f+f\mathrm{d}g$;

$3°$ $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g\mathrm{d}f-f\mathrm{d}g}{g^2}$,其中 $g\neq 0$.

我们只证最后那个公式.我们有

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)=\left(\frac{f}{g}\right)'\mathrm{d}x=\frac{gf'-fg'}{g^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{gf'\mathrm{d}x-fg'\mathrm{d}x}{g^2}=\frac{g\mathrm{d}f-f\mathrm{d}g}{g^2}.$$

如果 c 是一个常数,显然 $\mathrm{d}c=0$.由上述的 $2°$得知 $\mathrm{d}cf=c\mathrm{d}f$,即常数因子可以提到微分运算的符号之外.

现在我们可以给出"导数"的另外一种记法.直到目前为止,f 的导函数被记作 f'.在公式(4)的双方除以 $\mathrm{d}x$,得到

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=f'(x).$$

这就是说,导函数 f'可以用$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$来表示,这是导数的 Leibniz 记号.由于$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$是函数的微分与自变量的微分的商,因此导数也称为**微商**.从此以后,这两种名词经常被混用而无需加以特别的说明.高阶导数也称为**高阶微商**,它们的记法是

$$f''(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\right)=\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2},$$
$$f^{(n)}(x)=\frac{\mathrm{d}^nf(x)}{\mathrm{d}x^n},n=2,3,\cdots.$$

复合函数的微分公式有重要的意义.设 $y=f(x)$且 $x=\varphi(t)$,当 t 在 φ 的定义域中变化时,$\varphi(t)$的值不超过 f 的定义域,我们可以定义复合函数 $y=f\circ\varphi(t)$,这时 t 已是自变量,因此有微分公式

$$\mathrm{d}y=(f\circ\varphi)'(t)\mathrm{d}t=f'(x)\varphi'(t)\mathrm{d}t,$$

这里 $x=\varphi(t)$.但是 $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t$,代入上式便得出

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x, \tag{8}$$

这里仍然是 $x=\varphi(t)$;如果 x 是自变量时,上式自然成立.这就是说,公式(8)无论是对独立的自变量还是对中间变量都是正确的,这称为**微分的形式不变性**.

练习题 4.1

1. 求 y 关于 x 的微分:

(1) $y=\dfrac{1}{x}$;　　(2) $y=\arctan(ax+b)$;

(3) $y=\sin x-x\cos x$; (4) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$.

2. 填空:

(1) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$; (2) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$;

(3) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$; (4) $\mathrm{d}(\quad)=(2x+1)\mathrm{d}x$;

(5) $\mathrm{d}(\quad)=(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x$; (6) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$;

(7) $\mathrm{d}(\quad)=\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$; (8) $\mathrm{d}(\quad)=\cos x\sin x\mathrm{d}x$;

(9) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$; (10) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$;

(11) $\mathrm{d}(\quad)=\cos^2 x\sin x\mathrm{d}x$; (12) $\mathrm{d}(\quad)=\sin^2 x\mathrm{d}x$.

3. 设 u,v,w 均为 x 的可微函数,求 y 关于 x 的微分:

(1) $y=uvw$; (2) $y=\dfrac{u}{v^2}$;

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$; (4) $y=\arctan\left(\dfrac{u}{vw}\right)$;

(5) $y=\ln(u^2+v^2+w^2)^{1/2}$.

4. 微分下列方程,然后解出 y':

(1) $x=y+\mathrm{e}^y$; (2) $x=y+\ln y$;

(3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; (4) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$(常数 $a>0$);

(5) $\dfrac{y^2}{x}=\sqrt{x^2+y^2}$.

5. 利用微分作近似计算:

(1) $\sqrt[4]{80}$; (2) $\sin 29^\circ$;

(3) $\arctan 1.05$; (4) $\lg 11$.

§4.2 带Peano余项的Taylor定理

如果函数 f 在 x_0 处可微,便有上一节的公式(5):

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0),\ x\to x_0.$$

如果实际需要计较到 $x-x_0$ 的二阶无穷小,那么上述公式就没有任何意义.因

此自然会提出这样的问题:在 $f''(x_0)$存在的条件下,$f(x)$能不能用 $x-x_0$ 的一个二次多项式来近似,并使得其误差当 $x\to x_0$ 时是比$(x-x_0)^2$ 高级的无穷小?把这一要求用公式写出来,就是

$$f(x)=A+B(x-x_0)+C(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2),x\to x_0, \tag{1}$$

其中 A,B,C 是三个常数.如果这个要求能被满足,我们问这三个常数 A,B 和 C 该如何确定?

首先,令 $x\to x_0$ 得出

$$A=\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

在这样的条件下,把(1)改写为

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=B+C(x-x_0)+o(x-x_0),x\to x_0.$$

在上式双方令 $x\to x_0$,由于 f 在x_0 可导,得

$$B=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).$$

为了求出 C,注意到

$$C=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}.$$

对上式右边用 L'Hospital 法则,得

$$C=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}.$$

由于 $f''(x_0)$存在,可见

$$C=\frac{1}{2}f''(x_0).$$

到此为止,我们证明了只有惟一的一个二次多项式,即

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 \tag{2}$$

才能满足(1)的要求.是不是多项式(2)确实满足(1)式的要求呢?答案是肯定的,这是因为使用一次 L'Hospital 法则便得出

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\left(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2\right)}{(x-x_0)^2}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)-f''(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)}\\&=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}-f''(x_0)\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}(f''(x_0)-f''(x_0))=0,$$

所以(1)式成立.

再继续前进,不会有任何本质的困难.

我们给出:

定义 4.2　设函数 f 在点 x_0 有直到 n 阶的导数,这里 n 是任意给定的正整数.令

$$T_n(f,x_0;x)=f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n,$$

并称之为 f 在 x_0 处的 n 次 Taylor 多项式.

我们有下列重要的定理.

定理 4.1　设函数 f 在点 x_0 处有直到 n 阶的导数,则我们有

$$f(x)=T_n(f,x_0;x)+o((x-x_0)^n),x\to x_0. \tag{3}$$

证　用数学归纳法.$n=1$ 时,已知(3)成立.今设 $n=k$ 时(3)成立.由于

$$T'_{k+1}(f,x_0;x)=T_k(f',x_0;x),$$

利用 L'Hospital 法则和归纳假定,即得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_{k+1}(f,x_0;x)}{(x-x_0)^{k+1}}$$
$$=\frac{1}{k+1}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-T_k(f',x_0;x)}{(x-x_0)^k}=0.$$

这说明当 $n=k+1$ 时(3)也成立.　□

令

$$R_n(x)=f(x)-T_n(f,x_0;x),n=1,2,\cdots,$$

称它为**余项**.在当前,对于余项 R_n 只有定性的刻画:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$

这种余项我们称之为 Peano **余项**.

我们把公式(3)明确地写出来,就是

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),x\to x_0.$$

这个公式的右边,除了最后一项之外,前面是不超过 n 次的多项式.右边的第一项是一常数,而当 $x\to x_0$ 时,第二项、第三项、……依次是 $x-x_0$ 的一阶、二阶、

……无穷小. 这个公式的意义在于,在 x_0 点的近旁,一个很复杂的函数可以用多项式来近似地代替,公式的右边按照层次,按照其数值上的重要性从重要到不那么重要地依次摆了出来. 虽然余项一般已不是多项式,但是比起前面那些项的总和,已是微不足道. 因此,定理 4.1 是研究函数在一点近旁的性态的有力工具.

称多项式

$$T_n(f,0;x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

为 f 的 n 次 Maclaurin 多项式,相应地,

$$f(x)=T_n(f,0;x)+o(x^n) \tag{4}$$

就称为**带有 Peano 余项的 Maclaurin 定理**. 公式(3)或(4)通常也叫做函数 f 的 **Taylor 展开式**或 **Maclaurin 展开式**.

例 1　求 e^x 的 Maclaurin 展开式.

解　由于 $(e^x)^{(k)}=e^x, k=1,2,\cdots$,可见 e^x 的各阶导数在 $x=0$ 处取值为 1. 于是当 $x\to0$ 时有

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n).\quad\square$$

例 2　求函数 $f(x)=\sin x$ 的 Maclaurin 展开式.

解　我们有

$$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right), k=0,1,2,\cdots.$$

所以,当 k 为偶数时,$f^{(k)}(0)=0$;此外还有

$$f^{(2k+1)}(0)=\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k.$$

由此得出,当 $x\to0$ 时有

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n}).\quad\square$$

例 3　与前例类似,可以证明当 $x\to0$ 时有

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}).\quad\square$$

例 4　求函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 的 Maclaurin 展开式.

解

$$f(x)=\ln(1+x),\qquad f(0)=0,$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\qquad f'(0)=1,$$

$$f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2},\qquad f''(0)=-1,$$

$$f'''(x)=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},\qquad f'''(0)=2!,$$

一般地,

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k},\qquad f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!,$$

$k\in\mathbf{N}^*$. 于是当 $x\to 0$ 时有

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n).\quad\square$$

例 5 求函数 $f(x)=(1+x)^\lambda$ 的 Maclaurin 展开式, $x>-1$.

解 计算导数,得

$$f^{(k)}(x)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)(1+x)^{\lambda-k}.$$

用 $x=0$ 代入上式,

$$f^{(k)}(0)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1),k=1,2,3,\cdots.$$

由此便知,当 $x\to 0$ 时有

$$(1+x)^\lambda=1+\lambda x+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$$

虽然这里的 λ 不必是正整数,我们还是使用符号

$$\binom{\lambda}{k}=\frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)}{k!},k=1,2,3,\cdots.$$

还规定 $\binom{\lambda}{0}=1$. 于是有公式

$$(1+x)^\lambda=\sum_{k=0}^{n}\binom{\lambda}{k}x^k+o(x^n),x\to 0.\quad\square$$

例 6 求函数 $f(x)=\arctan x$ 的 Maclaurin 展开式.

解 由于 f 在 $x=0$ 处有任意阶的导数,由定理 4.1,有

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^{2n+1}),x\to 0.\tag{5}$$

其中 $n\in\mathbf{N}^*$. 问题是如何简便地把 $f^{(k)}(0)$ 算出来.

由 $f(x)=\arctan x$ 得出 $f(0)=0$; 由 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 得出 $f'(0)=1$.

在恒等式 $(1+x^2)f'(x)=1$ 的双方,对 x 求 n 阶导数,利用 Leibniz 公式,得出

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0.\tag{6}$$

将 $x=0$ 代入(6)式,得到

$$f^{(n+1)}(0)=-(n-1)nf^{(n-1)}(0),\tag{7}$$

这里 $n\in\mathbf{N}^*$. 由(7)立得

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & 当\ n\ 为偶数时;\\ (-1)^k(2k)!, & 当\ n=2k+1\ 时,\end{cases}$$

这里 $k=0,1,2,\cdots$. 代入(5)式,便得出

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+o(x^{2n+2}),x\to 0.$$

写得更明白一些,就是

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2k+1}x^{2n+1}+o(x^{2n+2}).\quad\square$$

用同样的技巧可以算出 arcsin x 的 Maclaurin 展开式,请读者当作一个习题来做.

以上这几个 Maclaurin 展开式,它们的系数都有很强的规律性,便于记忆.为了应用,熟记它们是很有好处的.

对函数值的近似计算来说,在公式(3)中取 $n=2,3$,可望获得比用微分所得更为精确的结果.但是,同样的缺点在这里也存在,那就是:对余项 $R_n(x)$没有定量的估计,只有一种定性的了解:当 $x\to x_0$ 的时候,它是比$(x-x_0)^n$ 高级的无穷小.

即使这样,带 Peano 余项的 Taylor 公式就已呈现出重要的作用.在这里,我们列出它的两项应用,第一是求极限,第二是彻底地讨论函数的极大、极小问题.

例 7　计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{\sin^3 x}.$$

解　用等价无穷小代替,得知上述极限与

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}.$$

有相等的值.由此可见,只需将上式分子展开到 x 的三次方,高于 3 阶的无穷小无需具体计算.由于

$$\begin{aligned}e^x\sin x&=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\\&=x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3),\end{aligned}$$

从而

$$e^x\sin x-x(1+x)=\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

可知原极限等于$\frac{1}{3}$.　$\square$

如果用 L'Hospital 法则来解这题,那就必须连续三次使用该法则,不如这里的办法更加直接.

例 8　计算极限

$$\lim_{x\to 0}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right).$$

解　当 $x\to\infty$ 时 $\frac{1}{x}\to 0$，于是

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

因此

$$x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}+o(1),\quad x\to\infty.$$

所求极限为 $\frac{1}{2}$. □

例 9　求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{\tan x-\sin x}.$$

解　先分解分母

$$\tan x-\sin x=\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)=\sin x(1-\cos x)\frac{1}{\cos x},$$

当 $x\to 0$ 时 $\sin x$ 与 x 为等价无穷小，$1-\cos x$ 与 $\frac{x^2}{2}$ 为等价无穷小，而 $\cos x\to 1$. 因此原极限等于

$$2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{x^3}.$$

但是

$$\begin{aligned}\sin x-\arctan x&=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\\&=\frac{1}{6}x^3+o(x^3),\end{aligned}$$

由此知原极限等于 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. □

例 10　求极限

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{a}{n\sqrt{n}}\cos\frac{2a}{n\sqrt{n}}\cdots\cos\frac{na}{n\sqrt{n}}.$$

解　记

$$P_n=\cos\frac{a}{n^{3/2}}\cos\frac{2a}{n^{3/2}}\cdots\cos\frac{na}{n^{3/2}}.$$

取对数得

$$\ln P_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{ka}{n^{3/2}}$$

利用等式 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ 得

$$\cos\frac{ka}{n^{3/2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{k^2a^2}{n^3} + o\left(\frac{k^3}{n^{9/2}}\right)$$

根据 $\ln(1+x) = x + o(x)$ 可得

$$\begin{aligned}\ln\cos\frac{ka}{n^{3/2}} &= \ln\left(1 - \frac{1}{2}\frac{k^2a^2}{n^3} + o\left(\frac{k^3}{n^{9/2}}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{2}\frac{k^2a^2}{n^3} + o\left(\frac{k^3}{n^{9/2}}\right) + o\left(\frac{k^2}{n^3} + o\left(\frac{k^3}{n^{9/2}}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{2}\frac{k^2a^2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\frac{k^2a^2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n^{3/2}} &= -\frac{a^2}{2n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 + o(1)\\ &= -\frac{a^2}{2n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + o(1).\end{aligned}$$

由此即得

$$\lim_{n\to\infty}\ln P_n = -\frac{a^2}{6},$$

因而

$$\lim_{n\to\infty}P_n = \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{6}}. \qquad \square$$

现在来进一步讨论极大与极小问题.设 $x\in(a,b)$,函数 f 在点 x_0 处有充分高阶的导数.设 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ 但 $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.由带 Peano 余项的 Taylor 展开式知

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^k), \quad x\to x_0.$$

将上式变形为

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + o(1), \quad x\to x_0.$$

上式右边的第一项是一个非零的常数,第二项是一个无穷小.因此当 $|x-x_0|>0$ 充分小时,上式保持着确定的符号.当 k 为偶数时,左边的分母取正值,因此分子也必须保持确定的符号,详细地说:设 k 为偶数而 $f^{(k)}(x_0)>0$ 时,这时 $f(x)>f(x_0)$ 对充分小的 $|x-x_0|>0$ 成立,从而 f 在 x_0 处取得严格的极小值;当 $f^{(k)}(x_0)<0$ 时,f 在 x_0 处取得严格的极大值.如果 k 是奇数,那么当 $x>x_0$

时，$(x-x_0)^k>0$，当 $x<x_0$ 时，$(x-x_0)^k<0$，由此可知：在 x_0 的左右两侧，$f(x)-f(x_0)$取相反的符号，所以 x_0 不是 f 的极值点.

除非函数 f 满足$f^{(k)}(x_0)=0,k=1,2,3,\cdots$（在§4.3 中我们将看到，这种函数确实存在），极值问题可以得到完满的解答.我们把这些结论总结为一条定理.

定理 4.2 设函数 f 在x_0 处有直到 k 阶的导数，并且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$ 但 $f^{(k)}(x_0)\neq 0$.那么，当 k 为奇数时，x_0 不是 f 的极值点；当 k 为偶数并且$f^{(k)}(x_0)>0$ 时，x_0 是 f 的极小值点，而 $f^{(k)}(x_0)<0$ 时，x_0 是 f 的极大值点.

练习题 4.2

1．计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}(\alpha\neq\beta)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right)$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}(a>0)$.

2．设函数 f 在点x_0 附近可以表示为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),$$

问是否必定有

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\ k=0,1,\cdots,n?$$

3．设 $\alpha>-1$，计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right)\left(1+\frac{2}{n^{\alpha+2}}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^{\alpha+2}}\right)\right]^{n^\alpha}.$$

问题 4.2

1．设

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}n^x\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right).$$

求 f 的定义域和值域.

2. 求证：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - n^4 + \frac{n^3}{2} - \frac{11}{24}n^2 + \frac{7}{16}n\right) = \frac{2\,447}{5\,760}.$$

3. 试证多项式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(2x-x^2)^k - 2x^k}{k}$$

能被 x^{n+1} 所整除.

§4.3　带Lagrange余项和Cauchy余项的Taylor定理

带 Peano 余项的 Taylor 定理，正如我们已经看到的那样，只适合于研究函数在一个给定的点的近旁的近似行为，而不便于讨论函数在大范围内的性质. 为了克服这一缺点，需要将余项“量化”. 我们有下面的

定理 4.3(Taylor)　设 f 在开区间 (a,b) 中有 $n+1$ 阶导数，x_0, x 是 (a,b) 中任意两点，那么

$$f(x) = T_n(f, x_0; x) + R_n(x), \tag{1}$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{2}$$

或者

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0), \tag{3}$$

这里 ξ 是位于 x_0 与 x 之间的一个数，(2)和(3)中的 ξ 一般来说是不相等的. (2)和(3)分别称为 Lagrange 余项和 Cauchy 余项.

证明　记

$$F(t) = T_n(f, t; x) = f(t) + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,$$

通过直接计算可得

$$F'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \tag{4}$$

回忆定理 3.8：“如果函数 g 和 λ 在 $[\alpha,\beta]$ 中连续，在 (α,β) 中可微，$\lambda(\alpha)=1$，

$\lambda(\beta)=0$,那么存在 $\xi\in(\alpha,\beta)$,使得 $g'(\xi)=\lambda'(\xi)(g(\alpha)-g(\beta))$."现在对函数 $g(t)=F(t)$,$\lambda(t)=\left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^{n+1}$ 在区间$[x_0,x]$(不妨设 $x_0<x$)中用定理3.8,则必存在 $\xi\in(x_0,x)$,使得

$$F'(\xi)=\lambda'(\xi)(F(x_0)-F(x)). \tag{5}$$

容易算出,

$$\lambda'(t)=-(n+1)\frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}}. \tag{6}$$

把(4)和(6)代入(5)得

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n=-(n+1)\frac{(x-\xi)^n}{(x-x_0)^{n+1}}(T_n(f,x_0;x)-f(x)).$$

由此即得

$$f(x)=T_n(f,x_0;x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

这就是要证的(2).为了得到(3),在定理 3.8 中取 $\lambda(t)=\frac{x-t}{x-x_0}$,则 $\lambda'(t)=-\frac{1}{x-x_0}$,代入(5)得

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n=-\frac{1}{x-x_0}(T_n(f,x_0;x)-f(x)),$$

所以

$$f(x)=T_n(f,x_0;x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

这就是要证的(3). □

注意,在(2)式中若取 $n=0$,便得出

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0).$$

这正是 Lagrange 中值定理.所以说,Taylor 定理是 Lagrange 中值定理的推广.

有了这种带有定量性质的余项之后,我们就可以在大范围内(而不只是一个给定点的近旁)来研究用多项式逼近函数 f 的误差.特别是,当我们知道 $f^{(n+1)}$ 在这个范围内有界并且能找到 $|f^{(n+1)}|$ 的一个尽可能小的界的时候,好处就显现出来了.

作为 Taylor 公式的一个应用,我们来导出线性插值的误差公式.

设函数 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$.由两点$(a,f(a))$和$(b,f(b))$所决定的线性函数记为 l,即

$$l(x)=\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b). \tag{7}$$

l 叫做 f 在区间 $[a,b]$ 上的**线性插值**. 函数 f 与 l 的几何关系见图 4-3. 如果 f'' 在 (a,b) 内连续, 那么我们可以对这种插值带来的误差作出估计.

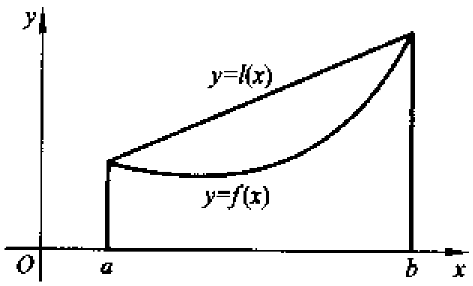

图 4-3

定理 4.4 设 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数, f'' 在 (a,b) 中连续, l 是由 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 确定的线性函数. 如果 $|f''|$ 在 (a,b) 中的上界为 M, 那么对任意 $x\in[a,b]$ 有

$$|f(x)-l(x)|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2M$$

证明 把 $f(x)$ 写成

$$f(x)=\frac{b-x}{b-a}f(x)+\frac{x-a}{b-a}f(x) \tag{8}$$

由(7)和(8)便得

$$l(x)-f(x)=\frac{b-x}{b-a}(f(a)-f(x))+\frac{x-a}{b-a}(f(b)-f(x)). \tag{9}$$

利用带 Lagrange 余项的 Taylor 定理, 我们有

$$f(a)-f(x)=(a-x)f'(x)+\frac{1}{2}(a-x)^2f''(\xi),a<\xi<x,$$

$$f(b)-f(x)=(b-x)f'(x)+\frac{1}{2}(b-x)^2f''(\eta),x<\eta<b.$$

代入(6)的右边, 我们发现 $f'(x)$ 将会被抵消. 精确地说,

$$l(x)-f(x)=\frac{(b-x)(x-a)}{2}\left(\frac{x-a}{b-a}f''(\xi)+\frac{b-x}{b-a}f''(\eta)\right).$$

由于 $\frac{x-a}{b-a}>0,\frac{b-x}{b-a}>0$ 并且它们的和等于 1, 因此上式大括号中的量必介于 $f''(\xi)$ 与 $f''(\eta)$ 之间. 由 f'' 的连续性, 这个量可以表为 $f''(\zeta)$, 其中 $\zeta\in(a,b)$. 这样就得到了

$$l(x)-f(x)=\frac{(b-x)(x-a)}{2}f''(\zeta),\zeta\in(a,b). \tag{10}$$

由此即得

$$|l(x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{2}(b-x)(x-a)M\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2M. \quad \square$$

上面这个估计说明，M 愈小，线性插值的逼近效果就会愈好. 当 M 很小时，曲线 $y=f(x)$ 的切线改变得不剧烈，这也是符合几何直观的.

仔细观察等式(10)，我们可以发现，如果 $f''\geqslant 0$，那么由(10)可以推出 f 在 $[a,b]$ 上是凸函数的结论.

现在我们来看看上节的例子中那些初等函数的 Maclaurin 展开式的 Lagrangez 余项.

例 1 对于 e^x，我们有 Lagrange 余项

$$R_n(x)=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

由于 ξ 是在 0 与 x 之间，我们令 $\theta=\frac{\xi}{x}$，于是

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

这里 $0<\theta<1$. $\square$

例 2 对于

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n}(x),$$

其余项的 Lagrange 形式是

$$R_{2n}(x)=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\xi+\frac{2n+1}{2}\pi\right)$$

$$=(-1)^n\frac{\cos\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

ξ 仍在 0 与 x 之间，因此可以写作 $\xi=\theta x$，这样一来，

$$R_{2n}(x)=(-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1},\quad 0<\theta<1.$$

在这个问题中，我们认为正弦已经展开到了 x^{2n} 这一项，不过系数是 0 而已，所以余项写作 R_{2n} 而不是 R_{2n-1}. $\square$

例 3 对于

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n+1}(x).$$

与例 3 类似地，可得

$$R_{2n+1}(x)=(-1)^{n+1}\frac{\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

其中 $\theta\in(0,1)$. $\square$

例 4 考虑函数 $\ln(1+x)$. 我们有

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x).$$

余项的 Lagrange 形式为

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}},\ 0<\theta<1.\quad\square$$

例 5　对于任何 $x>-1$，我们有

$$(1+x)^\lambda=\sum_{k=0}^{n}\binom{\lambda}{k}x^k+R_n(x).$$

余项的 Lagrange 形式是

$$R_n(x)=\frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\lambda-n-1}x^{n+1},$$

其中 $\theta\in(0,1)$；余项的 Cauchy 形式是

$$R_n(x)=\frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n)}{n!}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{\lambda-1}x^{n+1},$$

其中 $\theta\in(0,1)$. $\square$

在例 5 中，我们同时列举了两种形式的余项，这是因为在将 $(1+x)^\lambda$——这里 λ 不是正整数——作 Maclaurin 展开时，在 $x\in(-1,0)$ 这一范围，Lagrange 余项不便于用来作估计，利用 Cauchy 余项反而方便. 当 $|x|<1$ 时，因为 $x>-1$，所以 $1+\theta x>1-\theta>0$，从而

$$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n<1.$$

现在再来估计含有未知的 θ 的另一项，即 $(1+\theta x)^{\lambda-1}$. 由于 $|x|<1$，我们有

$$1-|x|\leqslant 1+\theta x\leqslant 1+|x|.$$

因此

$$|R_n(x)|\leqslant\begin{cases}\dfrac{|\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n)|}{n!}(1+|x|)^{\lambda-1}|x|^{n+1}, & \text{当 }\lambda>1\text{ 时;}\\[2mm] \dfrac{|\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n)|}{n!}(1-|x|)^{\lambda-1}|x|^{n+1}, & \text{当 }\lambda<1\text{ 时.}\end{cases}\tag{11}$$

写到这里，想起了一个有趣的、也是发人深省的故事. 在 50 年代，凡是从大学数学系毕业被分配到中国科学院数学研究所工作的青年人，著名数学家、当时任数学所所长的华罗庚先生照例要出一份试卷考一考他们，检查他们的基础知识掌握得如何. 那些珍贵的试题现在已不易查考，但是其中 1956 年的一个题目竟不胫而走，长久地留在人们的脑海里. 这个题目是：近似计算 $2^{1/5}$. 当时的有些青年人很可能对这个初等问题感到意外，它怎么会同高等数学联系在一起？也许有人感到束手无策，一筹莫展. 实际上这就是 Taylor 定理数值应用的一个例子，只不过为学生所忽视罢了. 数学界一代宗师华罗庚教授可谓用心良苦，他就是想用这一道题目来告诫青年数学工作者要用活高等数学的方法，并且不要轻

视数值计算.下面我们来解这道题目.

例 6 求 $2^{1/5}$的近似值.

解 先找一个数,要求是:它的 5 次方与 2 比较接近.例如说取 $1.2=\frac{6}{5}$,它的 5 次方是 2.488 32,比 2 多了一点.于是

$$2=\left(\frac{6}{5}\right)^5-\left(\left(\frac{6}{5}\right)^5-2\right)=\left(\frac{6}{5}\right)^5\left(1-\frac{1\ 526}{6^5}\right).$$

令 $\delta=\frac{1\ 526}{6^5}=0.196\ 244\ 9\cdots$.于是,利用 Taylor 展开式,得

$$2^{1/5}=\left(\frac{6}{5}\right)(1-\delta)^{1/5}=\left(\frac{6}{5}\right)\left(1-\frac{1}{5}\delta-\frac{8}{100}\delta^2-\frac{6}{125}\delta^3-\cdots\right).$$

如果我们就取这四项作为近似值,得出的结果是 1.148 768 6….现在问:这个数值的近似程度如何?这就要通过余项来估计.这时 $\lambda=\frac{1}{5}<1$, $n=3$.因此,根据公式(11)的第二式,应有

$$\begin{aligned}|R_3(-\delta)|&\leqslant\frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{9}{5}\right)\left(\frac{14}{5}\right)(1-\delta)^{-4/5}\delta^4\\&=\frac{84}{625}\left(\frac{1}{1-\delta}\right)^{4/5}\delta^4.\end{aligned}$$

由于 $\delta<0.2=\frac{1}{5}$,故

$$\left(\frac{1}{1-\delta}\right)^{4/5}<\left(\frac{5}{4}\right)^{4/5}<\frac{5}{4},$$

因此

$$|R_3(-\delta)|<\frac{21}{125}\delta^4=0.000\ 249\ 2\cdots.$$

这说明误差不超过万分之三.直接用计算器算出 $2^{1/5}=1.148\ 698\ 4\cdots$,符合我们的预计. □

下面是一个估计整体逼近的误差的例子.

例 7 在区间$[0,\pi]$上,用 9 次多项式

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}$$

来逼近函数 $\sin x$,试求出一个误差界.

解 由于 $x\in[0,\pi]$,我们有

$$|R_{10}(x)|\leqslant\frac{x^{11}}{11!}\leqslant\frac{\pi^{11}}{11!}=0.007\ 340\ 4\cdots,$$

这是非常好的近似.在图 4-4 中,画出了 1 次、3 次、5 次、7 次和 9 次的 $\sin x$ 的 Maclaurin 多项式的图形.在区间$[0,\pi]$上 9 次多项式的图形与 $y=\sin x$ 的图形

几乎合为一体，肉眼已不能辨别它们之间的差别，这与上面算出来的数值结果是吻合的. □

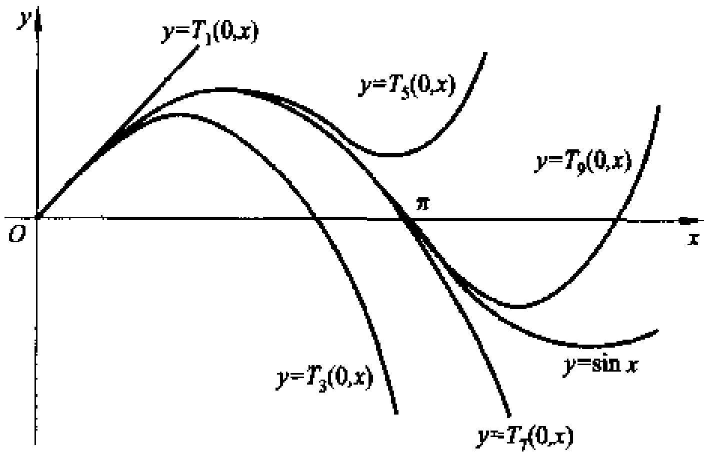

图 4－4

在结束对 Taylor 定理的讨论之前，我们要指出：切勿以为只要提高 Taylor 多项式的次数，就能不断地改进对于函数的逼近程度. 一个著名的例子是：研究函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时}. \end{cases}$$

这个函数当 $x\neq 0$ 时显然是无限次可导的. 我们要证明它在 $x=0$ 处也无限次可导. 先来求 $f'(0)$. 作变换 $u=\dfrac{1}{t}$ 之后，可见

$$f'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{-1/t^2}}{t}=\lim_{u\to\infty}\frac{u}{e^{u^2}}=0.$$

由此得出

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^3}e^{-1/x^2}, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时}. \end{cases}$$

我们用归纳法来证明：当 $x\neq 0$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，有

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2},$$

这里 $P_n(t)$ 是 t 的 $3n$ 次多项式. 当 $n=1$ 时，上面的计算表明这是对的. 设 $P_k(t)$ 是 t 的 $3k$ 次多项式，那么当 $x\neq 0$ 时，

$$f^{(k+1)}(x)=\left(P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}\right)'=\left(P_k\left(\frac{1}{x}\right)\frac{2}{x^3}-P'_k\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\right)e^{-1/x^2}.$$

所以

$$P_{k+1}(t)=2t^3P_k(t)-t^2P'_k(t).$$

由归纳假设,$P_k(t)$是 t 的 $3k$ 次多项式,上式表明 $P_{k+1}(t)$是 t 的 $3(k+1)$次的多项式.现在来证明 $f^{(n)}(0)=0$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立.仍用归纳法,当 $n=1$ 时结论已被证明.设 $f^{(k)}(0)=0$,于是

$$\begin{aligned}f^{k+1}(0)&=\lim_{t\to0}\frac{f^{(k)}(t)-f^{(k)}(0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f^{(k)}(t)}{t}\\&=\lim_{t\to0}P_k\left(\frac{1}{t}\right)\frac{e^{-1/t^2}}{t}\\&=\lim_{u\to\infty}\frac{uP_k(u)}{e^{u^2}}=0.\end{aligned}$$

这是由于当 $u\to\infty$时指数函数 e^{u^2} 是比任何 u 的多项式都高级的无穷大.

这就是说,f 是 $\mathbf{R}$ 上一个无限次可导的偶函数,且 $f^{(n)}(0)=0,n=1,2,3,\cdots$.函数 f 的 Maclaurin 多项式恒等于 0.因此,无论怎样提高它的次数,也不能改进它对 $f(x)$(这里 $x\neq0$)的逼近于万一! 实际上,此时 $f(x)=R_n(x),n=1,2,3,\cdots$,即余项永远是函数 f 自身!

这个函数是一个很奇特的函数,它的图形可见于图 4-5.显见,当 $x=0$ 时函数取到它的最小值 0,但这一事实不可以用定理 4.2 来证实.

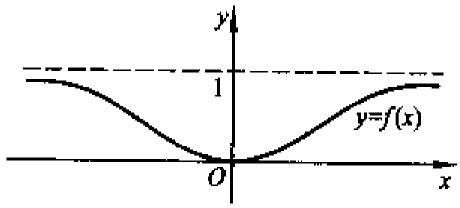

图 4-5

在本章即将结束的时候,回顾一下 Taylor 定理所起的作用是很有帮助的.Taylor 定理最重要的作用是,在一个给定点的近旁,将函数近似地用多项式来代替,因此它成为研究函数在一点近旁的行为的有力工具.利用带 Peano 余项的 Taylor 定理,可以很方便地计算许多“不定型”的极限,可以比较彻底地研究函数的极值.带 Lagrange 余项和 Cauchy 余项的 Taylor 定理,可以从理论上讨论函数的单调性、凸性,由此可以证明一些不等式.我们既可以利用 Taylor 定理来计算函数在一点上的近似值,也可以在整体上(即在一个区间上)用多项式来逼近一个比较复杂的函数.当然,我们必须为这一切便利付出代价,那就是函数必须在一定的范围内有适当高阶的导函数.

当我们认识到上面所提到的 Taylor 定理所带来的好处之后,就会感到,把

它说成是一元微分学的顶峰，并未言过其实.

练习题 4.3

1. 将多项式 $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$ 按 $x+1$ 的幂展开.

2. 按指定的次数写出函数 f 在 $x=0$ 的 Taylor 多项式：

(1) $f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$，写到 x 的 4 次；

(2) $f(x)=e^{2x-x^2}$，写到 x 的 5 次；

(3) $f(x)=\ln(\cos x)$，写到 x 的 6 次；

(4) $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$，写到 x 的 4 次；

(5) $f(x)=\tan x$，写到 x 的 5 次；

(6) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，写到 x 的 6 次.

3. 按指定的次数写出函数 f 在指定点 x_0 处的 Taylor 多项式：

(1) $f(x)=\sin x, x_0=\dfrac{\pi}{2}$，写到 $2n$ 次；

(2) $f(x)=\cos x, x_0=\pi$，写到 $2n$ 次；

(3) $f(x)=e^x, x_0=1$，写到 n 次；

(4) $f(x)=\ln x, x_0=2$，写到 n 次；

(5) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}, x_0=0$，写到 $2n+1$ 次；

(6) $f(x)=xe^{-x^2}, x_0=-1$，写到 $2n+1$ 次.

4. 曲线 $y=\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 称为悬链线. 试证：抛物线 $y=1+\dfrac{x^2}{2}$ 同悬链线在区间 $[-1,1]$ 上的偏差小于 0.20.

5. 设函数 f 和 g 在 $(-1,1)$ 上无限次可导，且

$$|f^{(n)}(x)-g^{(n)}(x)|\leqslant n!\,|x|,\quad |x|<1, n=0,1,2,\cdots.$$

求证：$f=g$.

6. 当 $x>0$ 时，求证：对任何 $n\in\mathbf{N}^*$，有

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^{2n}}{2n}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

问题 4.3

1. 设函数 f 在点 x_0 处有 $n+1$ 阶导数，且 $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$. 将 f 在 x_0 处按 Taylor 公式展开：

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{h^n}{h!}f^{(n)}(x_0+\theta_n h),$$

其中 $\theta_n\in(0,1)$. 求证：

$$\lim_{h\to 0}\theta_n=\frac{1}{n+1}.$$

2. 设 f 在区间 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$. 求证：存在 $c\in(a,b)$，使得

$$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

3. 设函数 f 在 $[0,1]$ 上有二阶导函数，$f(0)=f(1)=0$，并且在 $[0,1]$ 上函数 f 的最小值为 -1. 求证：存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\geqslant 8$.

4. 设 f 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内有 n 阶导数，且

$$f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,$$

但 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. 当 $0<|h|<\delta$ 时，

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h),\ 0<\theta<1.$$

证明：

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n^{1/(n-1)}}.$$

5. 设 $P_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!},\ n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 当 n 为偶数时，$P_n>0$；

(2) 当 n 为奇数时，P_n 有唯一的实零点；

(3) P_{2n+1} 的实零点记为 $x_n(n=0,1,2,\cdots)$. 求证：数列 $\{x_n\}$ 严格递减地趋于 $-\infty$.

6. 设函数 f 在 $[0,2]$ 上满足 $|f|\leqslant 1$ 及 $|f''|\leqslant 1$. 证明：在这个区间上 $|f'|\leqslant 2$，而且 2 是最小的常数.

7. 设函数 f 在 $\mathbf{R}$ 上二次可导，令 $M_k=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|f^{(k)}(x)|<+\infty,k=0,1,2$. 求证：

$$M_1^2\leqslant 2M_0M_2.$$

第 5 章　插值与逼近初步

我们考虑函数 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$.这个函数也许相当复杂,不便计算,不便研究.一个很自然的想法是要用一个比较简单的函数 $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ 来代替 f,同时使得 $|f-g|$ 在整个区间上不致很大.最简单的、又充分光滑的函数是多项式,所以常取多项式来作 g,计算多项式的时候只涉及加和乘两种运算.通常,一个 n 次多项式是指

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

这里 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是 $n+1$ 个实数.这种表示法称为多项式按幂基底 $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 的表示.但是,这种表示不是在任何情况下都是方便的.例如说,在研究一个多项式在给定的点 $a\neq 0(a\in\mathbf{R})$ 的近旁的行为时,采用下述基底

$$1,x-a,(x-a)^2,\cdots,(x-a)^n$$

来表示 n 次多项式就十分方便.

首先引入必要的记号和概念.所有次数小于或等于 n 的实系数多项式连同数 0 所组成的集合记为 P_n.很明显,如果 $p_1,p_2\in P_n$,那么 $p_1+p_2\in P_n$;当 $p\in P_n$ 时,对任何实数 λ,有 $\lambda p\in P_n$.若用"线性代数"中的术语,我们说 P_n 是一个实数域上的**线性空间**(或称**向量空间**).对任何 $p\in P_n$,一定存在实数 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$,使得

$$p(x)=\alpha_0+\alpha_1(x-a)+\alpha_2(x-a)^2+\cdots+\alpha_n(x-a)^n.$$

用线性代数的语言,我们说 p 是(或者说"可以表示成")这组基底的线性组合.容易知道各个 α_i 的计算方法,即

$$\alpha_i=\frac{p^{(i)}(a)}{i!},\ i=0,1,2,\cdots,n.$$

"插值与逼近"的内容十分广泛和深刻,它们已经构成了数学的一个分支.我们在这一章里只涉及"多项式插值和逼近"的一些最初等的内容,它们既是我们已经学过的一元微分学知识的很好的应用,同时又是本册第 8 章所需要的预备知识.

§5.1　Lagrange 插值公式

我们已经指出,在任一指定的地点,温度是时间的函数.设想某气象站在时

刻 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n(x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n)$这些点上记录下来的温度分别是 $y_0,y_1,y_2,\cdots,y_n$，并在直角坐标系中标注了 $n+1$ 个点(x_i,y_i)，$i=0,1,\cdots,n$. 这样做了之后，除了作记录的这 $n+1$ 个点之外，别的时刻的温度是不知道的. 例如说，当 $x\in(x_{i-1},x_i)$(其中 $i=1,2,\cdots,n$)时，气温是未知的. 我们希望找出一个函数 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$，其中 $a=x_0,b=x_n$，并且 $f(x_i)=y_i$，$i=0,1,\cdots,n$. 我们就用 f 来作为温度函数的某种近似. 这就是所谓**插值问题**(简称**插值**). 称$(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n)$为插值的**节点序列**，其中的点 x_i 叫做**节点**，而平面上的点(x_i,y_i)，$i=0,1,\cdots,n$，称为插值的**数据点**. 插值问题的几何提法是：求出一条可用显式表达的曲线，让它依次地通过所有的数据点.

解决插值问题的方法多种多样. 例如，把数据点(x_{i-1},y_{i-1})同(x_i,y_i)用直线段连接起来，$i=1,2,\cdots,n$，把得到的那个分段线性的连续函数叫做 f，就是一种可行的方法. 中学生使用《数学用表》时，教师建议的"插补法"正是这种"线性插值法". 但是，这样的函数 f 虽然连续，但在内节点处通常是不可导的. 从几何上看，曲线 $y=f(x)$见棱见角，光滑程度太差. 从这个意义上说，分段线性插值法是不可取的.

第二种方法是在 P_n 之内来寻找这个插值问题的解. 我们采取"攻其一点，不及其余"的方法. 就是说，我们设 $y_i=1$ 而 $y_j=0$(其中 $j\neq i$). 在 P_n 中满足这一特殊数据的元素记为 $L_i(x)$，$i=0,1,\cdots,n$. 我们马上会看到，这种 L_i 总是存在的. 由于

$$L_i(x_j)=\begin{cases}1, & \text{当 } j=i \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } j\neq i \text{ 时},\end{cases}$$

可见 L_i 以 $x_0,x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n$ 为其 n 个不同的零点. 因此

$$L_i(x)=k_i(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n),$$

其中 k_i 是一个待定的常数. 由 $L_i(x_i)=1$ 可以立刻求出

$$k_i=\frac{1}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)},$$

于是

$$L_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)},\tag{1}$$

其中 $i=0,1,\cdots,n$. 这样一来，原先那个一般的插值问题的解就是 $L_0,L_1,\cdots,L_n$ 的迭加. 具体地说，就是

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x). \tag{2}$$

我们来证明多项式 p 确实是解.第一,显然 $p\in P_n$;第二,

$$p(x_j)=\sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x_j)=y_j\cdot 1=y_j,\ j=0,1,\cdots,n.$$

我们可以进一步证明,在 P_n 之内,满足插值问题的多项式是惟一的.设 $p,q\in P_n$,都适合插值条件,即 $p(x_i)=y_i$,$q(x_i)=y_i$,$i=0,1,\cdots,n$.由此将导致多项式 $p-q$ 有 $n+1$ 个不同的零点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$.因为 $p-q\in P_n$,这只有 $p-q=0$ 即 $p=q$ 时才能成立.

利用这个惟一性可知,对于任何 $q\in P_n$,我们有恒等式

$$\sum_{i=0}^{n} q(x_i)L_i(x)=q(x). \tag{3}$$

这就是说,P_n 中的任何元素均可表为 $L_0,L_1,\cdots,L_n$ 的线性组合.所以,$\{L_i\}$组成 P_n 的另一个基底.我们称之为 **Lagrange 基底**,而(2)中的 L_i 由(1)表示,(2)称为 **Lagrange 插值公式**.

特别地,取 $q(x)=x^k$,其中 $k=0,1,\cdots,n$.由(3)得出下列恒等式

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i(x)=x^k.$$

其中 $k=0,1,\cdots,n$.若令 $k=0$,由上式得出

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x)=1. \tag{4}$$

Lagrange 插值公式的外观有对称美,有简洁性,导出的思路富有启发性,它堪称一件艺术品.作为一个不超过 n 次的多项式,它无限次可导,有无可挑剔的光滑性.可惜的是,除了次数 n 较低的场合,它几乎没有实际应用的价值.这是因为,当插值节点较多时,插值多项式的次数也就较高,对次数高的多项式来说,原始数据的微小误差,可能带来最后结果的严重误差,我们称这种现象为**计算不稳定**.更为严重的是,多项式曲线将产生人们不希望的上下振动.

插值问题还可以有另外的提法.设 f 是定义在$[a,b]$上的一个有解析表达式的函数,但是表达式相当复杂,不便于应用.这时,取出 $n+1$ 个点作为节点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$,用$(x_i,f(x_i))$,$i=0,1,2,\cdots,n$,来作为数据点.令

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x),\ a\leqslant x\leqslant b.$$

人们自然想到用多项式 p 来作为复杂函数 f 的一种近似，这时称 f 为**被插值函数**，而称 p 为**插值多项式**.

直观的想像是，在 $[a,b]$ 上加密插值节点时，插值函数序列会收敛到被插函数. 实际上，这是一种误解. Runge 观察到这样的现象：考察函数

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2},\ x\in[-5,5],$$

在区间 $[-5,5]$ 上采用等距节点作 Lagrange 多项式插值，结果发现，如果节点的个数趋向于无穷，那么只有在 $|x|\leqslant 3.63\cdots$ 时插值多项式序列才趋向于函数 $f(x)$，在这个范围之外，那多项式序列竟是发散的！这就是著名的"Runge 现象".

所以，为了实际应用，应当毫不犹豫地放弃高次多项式插值，走出新的路子. 这种路子也是多种多样的. 我们首先要谈的是，我们不拘泥于个别点上函数值的相等，而要求从整体上来说两个函数相当接近，这就是逼近理论. 我们特别希望逼近函数在很大程度上继承了被逼近函数的几何形态. 这就是著名的 Bernstein 逼近理论. 作为准备，我们需要下一节的内容.

练习题 5.1

1. 设 n 次多项式 p 适合 $p(k)=\binom{n+1}{k}^{-1}$，$k=0,1,\cdots,n$，求 $p(n+1)$.
2. 求一个 4 次多项式 p，使得 $p(i)=y_i$，$i=0,1,2,3,4$，其中 $y_0=1, y_1=-1, y_2=\frac{1}{2}, y_3=-2, y_4=1$.

问题 5.1

1. 给定整数 $x_0<x_1<\cdots<x_n$，证明：多项式 $p(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 在这 $n+1$ 个点所取的值之中，必有一个其绝对值不小于 $\frac{n!}{2^n}$.
2. 设 p 是一个不超过 $2n$ 次的多项式，且对每一个整数 $k\in[-n,n]$ 都有 $|p(k)|\leqslant 1$，求证：对每一个 $x\in[-n,n]$ 都有
$$|p(x)|\leqslant 2^{2n}.$$

§5.2 多项式的Bernstein表示

现在,再为 P_n 引入一组($n+1$ 个)多项式

$$B_i^n(x)=\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i},$$

$i=0,1,2,\cdots,n$,作为基底,称为 P_n 的 Bernstein 基底.当我们企图研究 P_n 中的多项式在区间[0,1]上的行为时,利用这一组基来表示 P_n 中的多项式是十分明智的,我们将逐步看到这一点.这些函数有如下的基本性质:

1° 当 $x\in[0,1]$时,对一切 $i=0,1,2,\cdots,n$,有

$$B_i^n(x)\geqslant 0.$$

2° 基底中 $n+1$ 个多项式的和等于1,即

$$\sum_{i=0}^{n}B_i^n(x)=1.$$

性质1°至为明显,性质2°可由二项式定理导出:

$$\sum_{i=0}^{n}B_i^n(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}$$
$$=((1-x)+x)^n=1.$$

定理5.1 多项式 $B_0^n(x),B_1^n(x),\cdots,B_n^n(x)$是 P_n 的一组基,也就是说,对任一 $p\in P_n$,存在惟一的一组实数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 使得

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_iB_i^n(x).\tag{1}$$

证明 设 $p\in P_n$,所以 p 可以写为 $1,x,\cdots,x^n$ 的线性组合.由于对任何 $k=0,1,\cdots,n$,我们有

$$\begin{aligned}x^k&=x^k(x+(1-x))^{n-k}\\&=\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}x^{k+i}(1-x)^{n-k-i}\\&=\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}\binom{n}{k+i}^{-1}B_{k+i}^n(x),\end{aligned}$$

这表明 $1,x,\cdots,x^n$ 是 $B_0^n,B_i^n,\cdots,B_n^n$ 的线性组合,从而 p 可以写成 $B_0^n,B_i^n,\cdots,B_n^n$ 的线性组合.设等式(1)成立,我们来证明:(1)式右边的系数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是由 p 惟一确定的,而这只需证明:当多项式 $p=0$ 时,这些系数全都是0.对 n 行归纳法,当 $n=1$ 时,$p(0)=p(1)=0$ 相当于 $a_0=a_1=0$,命题成立.设结论对

于 $n-1$ 次多项式成立.令 n 次多项式 $p=0$,由 $p(0)=0$ 知 $a_0=0$,因此(1)变成

$$\begin{aligned}p(x) &= \sum_{i=1}^{n} a_i B_i^n(x) = x\sum_{i=1}^{n} a_i \binom{n}{i} x^{i-1}(1-x)^{n-i} \\ &= x\sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}\binom{n}{j+1} x^j(1-x)^{n-1-j} \\ &= x\sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}\binom{n}{j+1}\binom{n-1}{j}^{-1} B_j^{n-1}(x),\end{aligned}$$

由此可见 $p=0$ 等价于

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}\binom{n}{j+1}\binom{n-1}{j}^{-1} B_j^{n-1}(x)=0.$$

由归纳假设得出 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$.这样,就完全证明了定理 5.1. □

式(1)的右边称为多项式 p 的 **Bernstein 表示**,系数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 称为 p 的 **Bernstein 系数**.

求 p 的导数,得

$$\begin{aligned}p'(x) = &\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{n!}{(i-1)!\ (n-i)!} x^{i-1}(1-x)^{n-i} \\ &- \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{n!}{i!\ (n-i-1)!} x^i(1-x)^{n-i-1},\end{aligned}$$

把最后一个等式右边的第一项中的"哑指标" i 用 $i+1$ 来替换,得到

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}\frac{n!}{i!\ (n-i-1)!} x^i(1-x)^{n-i-1}.$$

由此可知

$$p'(x)=n\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)B_i^{n-1}(x).$$

利用差分算子 Δ,上式又可以写成

$$p'(x)=n\sum_{i=0}^{n-1}\Delta a_i B_i^{n-1}(x). \tag{2}$$

这里

$$\Delta a_i = a_{i+1}-a_i,\quad i=0,1,\cdots,n-1.$$

式(2)是一个非常简洁的公式,它说的是:一个 n 次的 Bernstein 形式求导之后,等于 n 乘上一个 $n-1$ 次的 Bernstein 形式,不过后者的系数是原来的系数 a_0, $a_1,\cdots,a_n$ 作一阶差分所得到的 $\Delta a_0,\Delta a_1,\cdots,\Delta a_{n-1}$.

当我们对 p' 再求一次导数的时候,只须根据上述法则而无须经过新的计算,由(2)直接得出

$$p''(x)=n(n-1)\sum_{i=0}^{n-2}\Delta^2 a_i B_i^{n-2}(x).\tag{3}$$

这里的 Δ^2 表示二阶差分算子

$$\begin{aligned}\Delta^2 a_i &=\Delta(\Delta a_i)=\Delta(a_{i+1}-a_i)\\&=\Delta a_{i+1}-\Delta a_i=a_{i+2}-2a_{i+1}+a_i,\end{aligned}$$

其中 $i=0,1,\cdots,n-2$. 如有需要,可以对(3)继续求导.

为了获得几何的帮助,有必要引入

定义 5.1　设多项式 p 的 Bernstein 系数是 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$. 区间[0,1]上的连续函数$\tilde{p}$被称为 p 的**控制多边形**(control polygon),是指$\tilde{p}$适合条件:

1° 在子区间$\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$上,$i=1,2,\cdots,n$,$\tilde{p}$是线性函数;

2° $\tilde{p}\left(\frac{i}{n}\right)=a_i,i=0,1,\cdots,n$.

点$\left(\frac{i}{n},a_i\right)$,$i=0,1,\cdots,n$,称为**控制多边形的顶点**,又称**控制点**;由$\left(\frac{i-1}{n},a_{i-1}\right)$与$\left(\frac{i}{n},a_i\right)$确定的直线段称为$\tilde{p}$的**边**,这里 $i=1,2,\cdots,n$. 所以$\tilde{p}$有 n 条边.

在这个定义中,多边形的概念与平面几何中多边形的概念是不相同的,几何中的多边形由封闭的线段组成,而控制多边形只不过是定义在[0,1]上的一个分段线性的连续函数. 提出控制多边形概念的,并不是一位职业数学家,而是法国当代著名的汽车工程师 P·Bézier,所以它又称为 Bézier 多边形. 由于这个概念的提出,一方面使得 Bernstein 逼近理论在工业和技术中找到了广泛的应用,同时又为函数逼近理论(特别是多元逼近论)注入了新的思想,形成了行之有效的、系统的所谓"**B**-网方法".

从几何上看,曲线与控制多边形有什么关联呢? 这正是下列两个定理试图回答的问题.

定理 5.2　多项式曲线 p 与它所对应的控制多边形$\tilde{p}$在它们的两端点处分别重合,就是说 $p(0)=\tilde{p}(0),p(1)=\tilde{p}(1)$;曲线 p 在起点与终点处的切线,分别和控制多边形的第一边与最后一边重合.

证明　设

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_iB_i^n(x).$$

分别用0与1代入上式,得出

$$p(0)=a_0,\qquad p(1)=a_n.\tag{4}$$

这就是第一个结论.再用 0 与 1 代入导数公式(2),得到

$$\left.\begin{aligned} p'(0) &= n\Delta a_0 = n(a_1 - a_0), \\ p'(1) &= n\Delta a_{n-1} = n(a_n - a_{n-1}). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

由此得出

$$p'(0) = \frac{a_1 - a_0}{\dfrac{1}{n}},$$

$$p'(1) = \frac{a_n - a_{n-1}}{\dfrac{1}{n}}.$$

注意到以上两式的右边分别是 $\tilde{p}$ 的第一边和最后一边的斜率,这样就证明了第二个结论. □

例 1　画出多项式 $p(x) = \dfrac{(1-x)(2-x)^2}{4}$ 的控制多边形.

解　设 p 有 Bernstein 表示

$$p(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i B_i^3(x).$$

先要决定出系数 a_0, a_1, a_2, a_3. 由(4)得

$$a_0 = p(0) = 1, \qquad a_3 = p(1) = 0.$$

求出 p',得到

$$p'(x) = \frac{(x-2)(4-3x)}{4}.$$

由公式(5),得

$$3(a_1 - a_0) = p'(0) = -2,$$

$$3(a_3 - a_2) = p'(1) = -\frac{1}{4}.$$

从以上两式解出

$$a_1 = -\frac{2}{3} + a_0 = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3},$$

$$a_2 = \frac{1}{12} + a_3 = \frac{1}{12}.$$

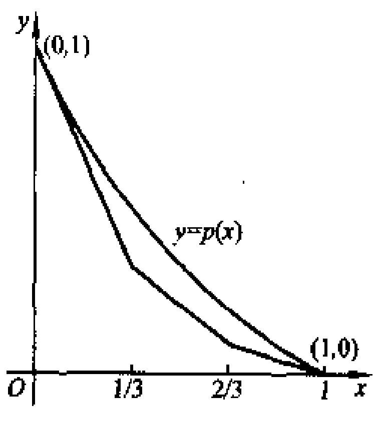

图 5－1

这样,我们求出了所有的 Bernstein 系数,1,1/3,1/12,0. 据此,图5－1中画出四个控制点(0,1),$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3},\frac{1}{12}\right)$,(1,0),便立即可以连成具有三条边的控制多边形,如果我们在同一图中画出多项式 p 的曲线,就可以确信定理 5.2 中所指出的事实. □

下列的定理反映了函数 p 与 $\tilde{p}$ 在正性、单调性和凸性方面的关系.

定理 5.3 设 $\tilde{p}$ 是多项式 p 所对应的控制多边形,那么

1° 当在[0,1]上 $\tilde{p}\geqslant 0$($\tilde{p}>0$)时,必有 $p\geqslant 0$($p>0$);

2° 当在[0,1]上 $\tilde{p}$ 递增(减)时,p 也递增(减);

3° 当在[0,1]上 $\tilde{p}$ 是凸函数时,p 也是凸的.

证明 设

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_iB_i^n(x).$$

1° 当 $\tilde{p}\geqslant 0$ 在[0,1]上成立时,必需且只需 $a_i\geqslant 0(i=0,1,\cdots,n)$.由于 Bernstein 基底在[0,1]上的正性,自然有 $p\geqslant 0$ 在[0,1]上成立;

2° 设 $\tilde{p}$ 在[0,1]上递增,这必需且只需

$$a_0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n,$$

这也就是 $\Delta a_i\geqslant 0$ 对 $i=0,1,\cdots,n-1$ 成立.由导数公式(2),可知 $p'(x)\geqslant 0$ 在[0,1]上成立,这便得出 p 在[0,1]上是递增的;

3° 设 $\tilde{p}$ 在[0,1]上是凸函数,这必需且只需 $\Delta a_0\leqslant\Delta a_1\leqslant\cdots\leqslant\Delta a_{n-1}$,即二阶差分

$$\Delta^2a_i\geqslant 0,\quad i=0,1,\cdots,n-2,$$

由二阶导数的公式(3)可知 $p''(x)\geqslant 0$ 在[0,1]上成立,所以 p 在[0,1]上是凸函数. □

现在回过头来讨论例1.写出 p 的 Bernstein 系数及其一阶和二阶差分

$$\begin{array}{ccccccc}
1, & & \frac{1}{3}, & & \frac{1}{12}, & & 0 \\
& -\frac{2}{3}, & & -\frac{1}{4}, & & -\frac{1}{12} & \\
& & \frac{5}{12}, & & \frac{1}{6}, & &
\end{array}$$

由此可见,在区间[0,1]上,除在 $x=1$ 之外多项式 p 恒取正值,在[0,1]上是严格递减的并且是严格凸的.这些事实,从图5-1中可以得到印证.

分段线性的连续函数应当说是一类最简单的函数,它们的性质和行为是比较容易被发现、被认识的.以上两个定理告诉我们,一旦认识了控制多边形的某些性质和行为,就可以预见到对应的多项式也具有这些性质和行为.这一事实可以说成,Bernstein 表示给出的多项式继承了它所对应的控制多边形的几何形象.读者如果作出许多类似于图5-1的图形,将会发现从几何形态来看 p 与 $\tilde{p}$

总体上非常相像!

利用这些想像,可以很容易地解决所谓"三次 Hermite 插值"问题.

例 2 求一个三次多项式 p,使它满足下列条件:

$$p(0)=y_0,\qquad p(1)=y_1,\qquad p'(0)=m_0,\qquad p'(1)=m_1,$$

其中 y_0,y_1,m_0,m_1 是任意给定的四个实数.

解 把这四个条件写成表格

	0	1
函数值	y_0	y_1
导数值	m_0	m_1

并称之为插值数据.我们先来分别解决四个特殊插值问题,把它们的解答分别写成 F_0,F_1,G_0,G_1,它们中的每一个都是三次多项式:

F_0

0	1
1	0
0	0

F_1

0	1
0	1
0	0

G_0

0	1
0	0
1	0

G_1

0	1
0	0
0	1

一旦这四个多项式求得之后,一般插值问题的解就是它们的线性组合,其系数分别是 y_0,y_1,m_0,m_1.如同前节一样,这里又一次采用"攻其一点,不及其余"的手法.基函数有如玩具中的"积木",利用它们可以很方便地搭建各种各样的"房屋".在当前,我们的解答是

$$p=y_0F_0+y_1F_1+m_0G_0+m_1G_1. \tag{6}$$

虽然用别的方法来求 F_0,F_1,G_0,G_1 并不费事,但是,如果使用控制多边形的方法,那就只需使用图形而不用任何文字即可得出它们,见图 5-2~图 5-5.其控制多边形是从插值数据直接画出的.

由此即可写出

$$\left.\begin{aligned}
F_0(x)&=B_0^3(x)+B_1^3(x)=1-3x^2+2x^3,\\
F_1(x)&=B_2^3(x)+B_3^3(x)=3x^2-2x^3,\\
G_0(x)&=\frac{1}{3}B_1^3(x)=x-2x^2+x^3,\\
G_1(x)&=-\frac{1}{3}B_2^3(x)=-x^2+x^3,
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

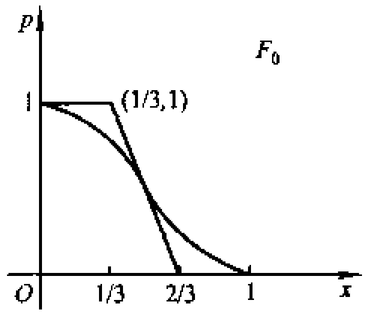

图 5－2

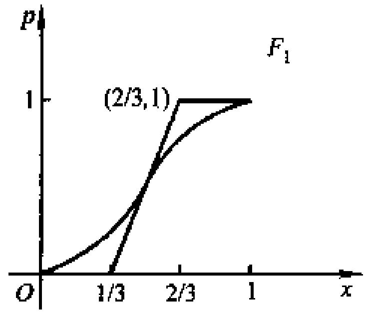

图 5－3

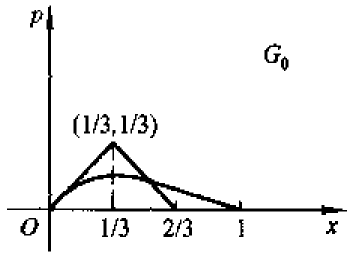

图 5－4

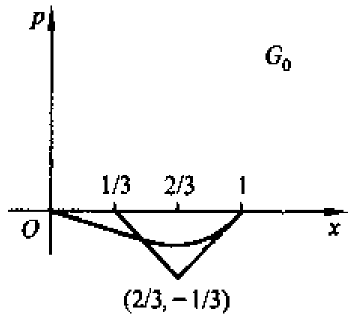

图 5－5

练习题 5.2

1．证明等式

$$\sum_{i=0}^{n} a_i B_i^n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\Delta^i a_0) x^i,$$

这里 Δ 表示差分算子．

2．求证：$\sum_{i=0}^{n} a_i B_i^n(x)$ 是一个不超过 $n-1$ 次的多项式的必要充分条件是

$$a_0 - \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} a_2 + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n = 0.$$

3．证明：$a_0 B_0^1(x) + a_1 B_1^1(x) \geqslant 0$ 对 $x \in [0,1]$ 成立的必要充分条件是 $a_0 \geqslant 0$ 且 $a_1 \geqslant 0$．

4．证明：$a_0 B_0^2(x) + a_1 B_1^2(x) + a_2 B_2^2(x) \geqslant 0$ 对 $x \in [0,1]$ 成立的必要充分条件是 $a_0 \geqslant 0, a_2 \geqslant 0$ 并且 $a_1 + \sqrt{a_0 a_2} \geqslant 0$．

5．研究以 $(1,0,\varepsilon,0,1)$ 为 Bernstein 系数的 4 次多项式在 $[0,1]$ 上的凸性，这里 ε 是任意的实数．求证：这个多项式在 $[0,1]$ 上为凸的必要充分条件是 $|\varepsilon| \leqslant 1$．

6. 给出三次多项式

$$\sum_{i=0}^{3} a_i B_i^3(x)$$

在[0,1]上为凸函数的必要充分条件.

7. 设 $p(x)=\sum\limits_{i=0}^{n} a_i B_i^n(x)$,求证:若

$$a_0+\sum_{a_i<0}\left(1-\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i}a_i>0,$$

$$a_n+\sum_{a_i<0}\frac{i}{n}\binom{n}{i}a_i>0,$$

则对一切 $x\in[0,1]$,有 $p(x)>0$.

8. 求 $B_i^n(x)$在[0,1]上的最大值,$i=0,1,2,\cdots,n$.

9. 将多项式 x^3-2x^2+4x-1 表示为 Bernstein 形式.

10. 设 $f(x)=B_0^3(x)+aB_1^3(x)+aB_2^3(x)+B_3^3(x)$,求证:在[0,1]上$f\geqslant 0$ 必须且只须 $a\geqslant -\dfrac{1}{3}$.

§ 5.3 Bernstein 多项式

定义 5.2 设 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$,称

$$B_n(f;x)=\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)B_i^n(x),\quad x\in[0,1] \tag{1}$$

为 f 的 n 次 Bernstein 多项式.

很明显,对任何函数 f 都有 $B_n(f;x)\in P_n$.对某一些函数 f,$B_n(f;x)$的次数可以小于 n.例如,我们有

$$B_n(1;x)=1, \tag{2}$$

$$B_n(x;x)=x. \tag{3}$$

这两个等式的证明是非常简单的:

$$B_n(1;x)=\sum_{i=0}^{n} B_i^n(x)=1,$$

$$B_n(x;x)=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)B_i^n(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(i-1)!\,(n-1)!}x^i(1-x)^{n-i}$$

$$=x\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{i!\,(n-i-1)!}x^i(1-x)^{n-i-1}$$

$$= x\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(x) = x.$$

从一般的函数 f 到它的 n 次 Bernstein 多项式,可以看成是一个变换:

$$f \to B_n(f).$$

这个变换仍可记为 B_n,称为**n 次 Bernstein 算子**.从定义很容易看出,对[0,1]上任何两个函数 f 与 g,总有

$$B_n(f \pm g) = B_n(f) \pm B_n(g);$$

对任何实数 λ,有

$$B_n(\lambda f) = \lambda B_n(f).$$

由于 B_n 具备这样两条性质,称 B_n 为**线性算子**.因为算子 B_n 具有线性以及(2),(3)两个等式,故对任何实数 λ,μ,有

$$B_n(\lambda x + \mu) = \lambda x + \mu.$$

这表明线性函数在算子 B_n 的作用之下不变,因此是算子 B_n 的不动点.不久将看到,线性函数是 B_n 的惟一不动点.

考察 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时;} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

容易看出,$B_n(D) = 1$ 对任何 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立.这说明,若不对函数 f 作一定的限制,$B_n(f)$与 f 可能毫无关联.但是,一旦作出 f 为[0,1]上的连续函数这一假定之后,就会获得当 $n\to\infty$时 $B_n(f)$收敛于 f 的性质,以及随之而来的许许多多的性质.在这里,我们将不讨论这些内容,而把它们留给本书的第 10 章.从 1912 年 Bernstein 提出这类多项式以来,它在函数逼近的理论研究中扮演着一个重要的角色;人们对 Bernstein 多项式至今仍保持着极大的兴趣,有关的文献浩如烟海.遗憾的是,一直到 20 世纪 50 年代后期,Bernstein 多项式未能找到任何实际应用.正在 50 年代与 60 年代交替的时候,情况起了根本性的变化.Bézier 创立的一套设计曲线、曲面的方法,当今被人们称为 Bézier 方法,在机械设计和制造中获得了极大的成功,这一方法的数学基础正是 Bernstein 多项式! Bézier 方法成功的要点在于,它把古典的函数逼近理论同几何结合到了这种程度,使得设计师和工程师使用起它时就如同他们使用常规的作图工具那样得心应手.半个多世纪以来被实际应用部门遗忘了的 Bernstein 多项式,如枯木逢春,焕发出新的生命力.

究竟是什么诱人的性质,使得 Bernstein 多项式拥有如此巨大的潜力? 简而言之,那就是它的"保形性质".以下的定理展示了保形性质的内容.

定理 5.4　设 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$,我们有

1° $B_n(f;0)=f(0), B_n(f;1)=f(1)$;

2° 如果 $f\geqslant 0$,则 $B_n(f)\geqslant 0$;如果 $f\leqslant 0$,则 $B_n(f)\leqslant 0$;

3° 如果 f 递增(减),则 $B_n(f)$也递增(减);

4° 如果 f 是凸函数,则 $B_n(f)$也是凸函数.

证明 前三条事实的证明十分容易,我们只证明 4°. 由于 f 是凸函数,故有

$$2f\left(\frac{i+1}{n}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{i}{n}+\frac{i+2}{n}\right)\right)\leqslant f\left(\frac{i}{n}\right)+f\left(\frac{i+2}{n}\right).$$

即

$$Q_i=f\left(\frac{i+2}{n}\right)-2f\left(\frac{i+1}{n}\right)+f\left(\frac{i}{n}\right)\geqslant 0,$$

这里 $i=0,1,\cdots,n-2$. 于是,依 § 5.2 的公式(3),可知

$$(B_n(f;x))''=n(n-1)\sum_{i=0}^{n-2}Q_iB_i^{n-2}(x)\geqslant 0.$$

这就证明了 $B_n(f)$是$[0,1]$上的凸函数. □

利用定理 5.4 中的 2°及 B_n 的线性,可以证明当 $f\geqslant g$ 时也有 $B_n(f)\geqslant B_n(g)$. 特别地,如果 m, M 分别是 f 在$[0,1]$上的一个下界和一个上界,那么这两个数也是 $B_n(f)$的下界和上界. 这些性质说明:$B_n(f)$继承了 f 的形状性质,所以称算子 B_n 是**保形的**.

在结束本节的时候,我们来讨论算子 B_n 的反复作用,即 B_n 的迭代极限问题. 由于其中的正整数 n 是固定的(当然是任意地固定的),为了记号的简洁,算子 B_n 就直接记为 B. 由于 $B(f)$是一个多项式,自然可以讨论 $B(B(f))$,我们把它记为 $B^{(2)}(f)$. 一般地,我们定义

$$B^{(k)}(f)=B(B^{(k-1)}(f)),$$

这里 $k\geqslant 2$. 算子 $B^{(k)}$叫做 B 的"k 次迭代". 同 B 一样,$B^{(k)}$也是线性算子,也以线性函数为其不动点. 此外,

$$B^{(k)}(f;0)=f(0),\quad B^{(k)}(f;1)=f(1),$$

等等. 现在的问题是:当算子 B 对函数 f 一次又一次地反复作用下去,最终会有什么后果? 回答这一问题有下列的

定理 5.5(Kelisky 与 Rivlin,1967) 设 f 是定义在$[0,1]$上的任意函数,那么

$$\lim_{k\to\infty}B^{(k)}(f;x)=(1-x)f(0)+xf(1). \tag{4}$$

证明 注意(4)式的右边是由曲线 $y=f(x)(0\leqslant x\leqslant 1)$两端点所决定的线性函数. 我们令

$$l(x)=(1-x)f(0)+xf(1),$$

并置

$$\varphi(x)=f(x)-l(x).$$

由于

$$B^{(k)}(\varphi)=B^{(k)}(f)-l,\ k=1,2,3,\cdots,$$

只须证明

$$\lim_{k\to\infty}B^{(k)}(\varphi)=0$$

就已足够.为此,需要一个不等式

$$(1-x)^n+x^n\geqslant\frac{1}{2^{n-1}},\quad x\in[0,1]. \tag{5}$$

只要注意到当 $x\geqslant0$ 时 x^n 是凸函数,便可推得

$$\frac{1}{2}((1-x)^n+x^n)\geqslant\left(\frac{(1-x)+x}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n},$$

这样就证明了(5)式.设

$$K=\max\left(\left|\varphi\left(\frac{i}{n}\right)\right|:i=0,1,\cdots,n\right),$$

于是,注意到 $\varphi(0)=\varphi(1)=0$,并利用不等式(5),得出

$$\begin{aligned}|B(\varphi;x)|&=\left|\sum_{i=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{i}{n}\right)B_i^n(x)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}\left|\varphi\left(\frac{i}{n}\right)\right|B_i^n(x)\\&\leqslant K\sum_{i=1}^{n-1}B_i^n(x)=K(1-(1-x)^n-x^n)\\&\leqslant K\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right).\end{aligned}$$

再将同样的推理做一次,得

$$|B^{(2)}(\varphi;x)|\leqslant K\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=K\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2.$$

归纳地得出

$$|B^{(k)}(\varphi;x)|\leqslant K\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^k,\ k=1,2,\cdots$$

这样就证明了

$$\lim_{k\to\infty}B^{(k)}(\varphi;x)=0$$

对一切 $x\in[0,1]$成立. □

利用 Kelisky 与 Rivlin 的定理,可以确定出算子 $B=B^n$ 的全部不动点.如果 f 是B 的不动点,那么 f 也是$B^{(k)}$的不动点,$k=1,2,3,\cdots$.因此,利用上述定理,便有

$$f(x)=\lim_{k\to\infty}B^{(k)}(f;x)=(1-x)f(0)+xf(1).$$

所以,f 只能是线性函数.

定理 5.5 所揭示的是 Bernstein 算子的"磨光性质"(smoothing property).试

想 $y=f(x)$是一条很不光滑、很不规则的曲线,可以处处没有切线,甚至处处不连续.经过算子 B_n 作用一次之后,变成了一条多项式曲线 $y=B_n(f;x)$,它不但是连续的,而且无限次地可导,从这个意义上说已经是充分光滑的了,但这不意味着这曲线没有多次的上下振动.定理 5.5 说的是,当我们将算子 B_n 一次又一次地对 f 作用,终极状态是一条直线段,它不但从解析上看是充分光滑的,而且从几何上看也是光顺的.这就显露出算子 B_n 有着使曲线光滑和光顺的作用,即"磨光"的作用.

正是 Bernstein 算子的保形和磨光的特征,Bernstein 多项式在 CAGD 中能得到如此广泛的应用,就不是一件令人感到奇怪的事了.关于 CAGD 的大意,将在第 8 章中介绍.

练习题 5.3

1. 设 p 是一个 k 次多项式,且 $k<n$,求证:$B_n(p;x)$是一个不超过 k 次的多项式.
2. 计算 $B_n(x^2;x)$和 $B_n(x^3;x)$.
3. 设 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$,且 $f(0)=0$,$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,1)$内递增,求证:$\dfrac{B_n(f;x)}{x}$也在$(0,1)$内递增.
4. 求证:
$$B_n(x(1-x);x)=\left(1-\frac{1}{n}\right)x(1-x),\ n\in\mathbf{N}^*.$$
5. 利用前题的结果来证明 Kelisky - Rivlin 定理.
6. 求证:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n(B_n(x^2;x)-x^2)=x(1-x)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n(B_n(x^3;x)-x^3)=3(1-x)x^2$.

第 6 章　求导的逆运算

§ 6.1　原函数的概念

在第 3 章，我们已经学会了求导运算．对于所有的初等函数，大家都能熟练地、正确地计算它们的导数．现在，我们要介绍的是求导的逆运算，即求原函数．具体地说，如果两个函数 F 与 f 适合关系

$$F'(x)=f(x), \tag{1}$$

这里 x 在某一个区间上变化，那么 F 称为 f 在该区间上的一个**原函数**．从逆运算的角度来看，可以把求原函数也看成是微分学的一个内容．但是，为什么要求原函数？原函数起着怎样重要的作用？那要等到第 7 章我们开始介绍积分学的时候，才能透彻地了解．

如果 F 是 f 的一个原函数，那么对任何常数 c，因为有 $(F(x)+c)'=F'(x)+c'=f(x)$，可知 $F+c$ 也是 f 的原函数．又，如果 F 与 G 都是 f 在某个区间上的原函数，那么由

$$(F(x)-G(x))'=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0,$$

得到 $F-G$ 必是一个常数．这说明，如果用某种手段找到了 f 的一个原函数 F，那么函数族 $\{F+c:c\in\mathbf{R}\}$ 是由 f 的全体原函数组成的．这个集合常记为

$$\int f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

其中 $\int$ 称为**积分号**，f 称为**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**．而(2)又称为**不定积分**——为什么有这个名称？这要到第 7 章才能明白，暂时权当一个术语来记忆．当我们求得 f 的任何一个原函数 F 之后，就可以这样书写：

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+c.$$

这个公式与下列公式

$$F'(x)=f(x)$$

完全是一回事．明白了这一点之后，前面那一个我们尚不熟悉的公式的正确性，就可以用第二个公式来检验．求导数大家是很有办法的．

现在我们可以罗列一大批公式:

$\int 0\mathrm{d}x = c$,其中 c 表示常数,

$\int x^{\lambda}\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\lambda}x^{\lambda+1} + c$,其中 $\lambda \neq -1$,

$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + c$,

$\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + c$, $\int a^{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^{x} + c$,

$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + c$, $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + c$,

$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + c$, $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + c$,

$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + c$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + c$,

如此等等.它们的正确性可以用求导运算来检验.我们在这里只证明

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + c.$$

当 $x>0$ 时,$|x| = x$,

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

当 $x<0$ 时,$|x| = -x$,

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x}.$$

所以这个公式是正确的.

从原函数和不定积分的定义,立刻可以看出下列各种性质:

1° $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$;

2° $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$,若用微分的记号表示,这也就是

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + c;$$

3° $\int (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$;

4° 如果 c 是不等于 0 的常数,我们有

$$\int cf(x)\mathrm{d}x = c\int f(x)\mathrm{d}x,$$

这就是说,常数可以提到积分号外面来.我们假设 $c\neq 0$,是因为若 $c=0$ 则上式右边等于 0,而左边是全体实数的集合,这就造成了定义上的混乱.有了这些性

质,我们可以算出更多一些不定积分.例如,

$$\int\left(3x^2+\frac{4}{x}\right)\mathrm{d}x=\int 3x^2\mathrm{d}x+\int\frac{4}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int \mathrm{d}x^3+4\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=x^3+4\ln|x|+c,$$

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int\mathrm{d}x-\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=x-\arctan x+c,$$

$$\int\tan^2x\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x}-\int\mathrm{d}x$$

$$=\tan x-x+c,$$

$$\int\frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x=\int(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=\int\cos x\mathrm{d}x+\int(-\sin x)\mathrm{d}x=\sin x+\cos x+c.$$

利用这些简单的性质,我们还可以求出许多简单函数的原函数.但是,这样一点点知识是很不够用的,还必须学会更多的计算原函数的方法和技巧.我们这里所指的"方法",主要的是两种,第一种叫做**分部积分法**,第二种叫做**换元法**.

练习题 6.1

1. 求原函数:

(1) $\int(2+x^5)^2\mathrm{d}x$;　(2) $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$;

(3) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x}\mathrm{d}x$;　(4) $\int\mathrm{ch}\,x\mathrm{d}x$;

(5) $\int\mathrm{sh}\,x\mathrm{d}x$;　(6) $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\mathrm{d}x$;

(7) $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\mathrm{d}x$;　(8) $\int\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x$;

(9) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)(x+b)}$;　(10) $\int\cos^2x\mathrm{d}x$;

(11) $\int\sin^2x\mathrm{d}x$;　(12) $\int\frac{x^5}{1+x}\mathrm{d}x$;

(13) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$; (14) $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$;

§6.2 分部积分和换元法

1. 分部积分法

设 u 与 v 是两个可导的函数,由求导法则知

$$(uv)' = u'v + uv',$$

对上式双方求不定积分,得到

$$uv = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx,$$

上式的左边没有加上任意常数 c,是因为右边的不定积分中仍包含着任意常数.事实上,只要有一个不定积分出现,其他地方都没有必要写上任意常数.

前式的右边有两个不定积分,只要其中的一个能求出来,那么另外一个自然就得出了,我们的选择原则是:哪个好算就先算哪个.例如说,其中的第一个便于算出,我们有

$$\int u(x)v'(x)dx = uv - \int u'(x)v(x)dx. \tag{1}$$

这也可以写成

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{2}$$

这两个公式都叫做**分部积分公式**.

例 1 计算 $\int xe^x dx$.

解 这里,被积函数是 xe^x,正好是两个函数的乘积.但是,究竟把其中的哪一个函数看成是(1)中的 u,另外一个看成 v',是有一番讲究的.粗略地说,就是要使 u' 和 v 都比较简单,而使 $u'v$ 的不定积分易于求出.什么叫做"简单"?什么叫做"复杂"?很难下精确的定义,这只能从大量的练习中细心体会.

在当前这个例子中,上述"原则"执行起来并不困难.只须令 $u = x, v' = e^x$ 就行了.这时 $u' = 1$,它的确比 x"简单",而 $v = e^x$ 也没有比 v' 更加"复杂".所以,依公式(1),有

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= \int x(e^x)'dx = xe^x - \int (x)'e^x dx \\ &= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c. \quad \square\end{aligned}$$

在同一个问题中,很可能分部积分的技术要反复使用多次.

例2　计算$\int x^2e^x dx$.

解　按照例1的方法,我们有

$$\begin{aligned}\int x^2e^x dx &= \int x^2(e^x)'dx = x^2e^x - \int (x^2)'e^x dx\\ &= x^2e^x - 2\int xe^x dx = x^2e^x - 2(xe^x - \int e^x dx)\\ &= x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + c = (x^2-2x+2)e^x + c. \quad\square\end{aligned}$$

例3　计算$\int \ln x dx$.

解　利用公式(2),我们有

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= x\ln x - \int x d\ln x\\ &= x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx\\ &= x\ln x - x + c. \quad\square\end{aligned}$$

在这种处理中,指导思想是:将 $\ln x$ 求导之后变成了最简单的有理函数$\frac{1}{x}$,而1的原函数仍是简单的多项式,并没有增加本质上的复杂性.

例4　计算$\int e^x\cos x dx$, $\int e^x\sin x dx$.

解　用分部积分法,

$$\int e^x\cos x dx = e^x\sin x - \int e^x\sin x dx,$$

$$\int e^x\sin x dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos x dx.$$

这是一个关于两个原函数的方程组,由此解出

$$\int e^x\cos x dx = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)e^x + c,$$

$$\int e^x\sin x dx = \frac{1}{2}(-\cos x + \sin x)e^x + c. \quad\square$$

在许多情况下,被积函数不只是自变量的函数,而且还依赖于一个正整数指标,指标也称为参数,这时经过分部积分,我们得到的往往不是最后的原函数,而是另一个类似的表达式,其中指标具有较小的数值.这样,经过几步反复之后,就能得到所需的结果.这就是所谓的递推法.让我们看两个例子.

例5　计算$\int \cos^n x dx$, $\int \sin^n x dx$,其中 $n\in\mathbf{N}^*$.

解　对于第一个不定积分,我们把被积函数 $\cos^n x$ 分解为

$\cos x\cos^{n-1}x=(\sin x)'\cos^{n-1}x$,经过分部积分之后,得

$$\begin{aligned}\int\cos^n x\,dx&=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\sin^2 x\,dx\\&=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)\,dx\\&=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\,dx\\&\quad-(n-1)\int\cos^n x\,dx.\end{aligned}$$

由此解出

$$\int\cos^n x\,dx=\frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx.$$

请注意,上式右边的不定积分中所包含的参数减少了2.现在反复使用这个公式,最后化为计算

$$\int\cos x\,dx=\sin x+c\ \text{或}\int dx=x+c.$$

究竟变成前一个还是后一个,得依据 n 是奇数还是偶数来定.

类似地,可以得到

$$\int\sin^n x\,dx=-\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx.$$

特别地,当 $n=2$ 时,我们有

$$\int\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}(\cos x\sin x+x)+c.$$

由此得到

$$\int\sin^2 x\,dx=\int(1-\cos^2 x)\,dx=x-\int\cos^2 x\,dx.$$

所以

$$\int\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}(x-\cos x\sin x)+c.$$

当 $n=3$ 时,

$$\int\cos^3 x\,dx=\frac{1}{3}\sin x(\cos^2 x+2)+c,$$

$$\int\sin^3 x\,dx=-\frac{1}{3}\cos x(\sin^2 x+2)+c.\quad\square$$

2. 换元法

在计算原函数时,与"换元法"相关的是求导中的"复合函数求导法则".

我们先看两个例子.

例6 求 $\int\sin^3 x\cos x\,dx$.

解 观察被积函数 $\sin^3 x\cos x$. 它的第一个因式是 $\sin x$ 的函数,第二个因式是 $\sin x$ 的导数. 回忆复合函数求导公式,不难看出

$$\int \sin^3 x\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sin^4 x+c.$$

通过微分运算,可以验证上述公式是正确的. □

例 7 求 $\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

解 把被积函数作变形

$$x\mathrm{e}^{x^2}=\frac{1}{2}(2x)\mathrm{e}^{x^2}=\frac{1}{2}(x^2)'\mathrm{e}^{x^2},$$

不计常数因子,其中一部分 e^{x^2} 是 x^2 的函数,而另一部分 $2x$ 正好是 x^2 的导数. 由复合函数求导公式,我们有

$$(\mathrm{e}^{x^2})'=(x^2)'\mathrm{e}^{x^2}.$$

由此得到

$$\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\mathrm{e}^{x^2})'\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+c. \quad \square$$

现在,我们可以来总结一般的规律. 设被积函数可以分解成两个因式的乘积,第一个因式是某一个可导函数 $\varphi(x)$ 的函数 $f(\varphi(x))$,而第二部分正是 $\varphi(x)$ 的导函数 $\varphi'(x)$,那么便有

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u, \tag{3}$$

一旦求出(3)右边的一个原函数之后,应当利用 $u=\varphi(x)$ 换回成 x 的函数. 式(3)的正确性可通过在(3)式两边分别对 x 求导数来证实:这时,从左边得出 $f(\varphi(x))\varphi'(x)$;而从右边(利用复合函数求导公式)得出 $f(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,并且

$$f(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

这就确定了(3)的正确性.

例 8 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b}$,这里常数 $a\neq0$.

解 由于

$$\frac{1}{ax+b}=\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)'}{ax+b},$$

可令 $u=ax+b$,从而

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b}&=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}u}{u}=\frac{1}{a}\ln|u|+c\\&=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+c. \quad \square\end{aligned}$$

例 9 求$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

解 注意到$(\ln x)'=\frac{1}{x}$,便得

$$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int \ln x\,\mathrm{d}\ln x=\frac{1}{2}(\ln x)^2+c.\quad \square$$

正如所有的用等式表达的公式一样,式(3)可以从其中的任何一边用到另外一边.为了说清楚这个意思,举一个最简单的例子.当我们写出$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$的时候,是在作因式分解;如果写成$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$,这是把两项的乘积展开.在这里,从例6到例9,我们是在按照(3)式所写的顺序在使用它,即设法把被积函数分解成两项的乘积,其中一项是某一个函数的导数,而另一项则是这个函数的函数.这种技巧叫做"凑微分",靠的是眼光的敏锐,"运用之妙,存乎一心",没有一定之规.要很好地掌握这种技巧,只能是多做题目.我们也可以把(3)的两边对换一下位置,即

$$\int f(u)\mathrm{d}u=\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x, \tag{4}$$

其中u经过了换元$u=\varphi(x)$成了x的函数.换元的目的是要让新的被积函数在某种意义之下得到简化,在许多的场合,这还是有章可循的.请看一些例子.

例 10 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$,其中$a\neq 0$.

解 我们知道,如果$a=1$,那么$\arctan x$就是一个原函数,这就建议作如下的换元$x=at$,那么$\mathrm{d}x=a\mathrm{d}t$,因此

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}&=\frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\\&=\frac{1}{a}\arctan t+c=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c.\quad \square\end{aligned}$$

例 11 计算$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$,其中$ab\neq 0$.

解 由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{a}{b}\tan x\right)}{ab\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\tan^2 x\right)},$$

我们有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+c.\quad \square$$

例 12 求$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$,其中$|x|\leqslant a$.

解 为了把被积函数中的根号去掉，作换元 $x=a\sin t,|t|\leqslant\frac{\pi}{2}$. 于是，$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$. 这样便得出

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x &= a^2\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{a^2}{2}(t+\cos t\sin t)+c\\ &= \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+c.\end{aligned}$$

这里我们利用了例5中的结果. □

例13 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}$，其中 $a>0$.

解 本题同例12一样，要设法去掉被积函数中的根号，但必须用另一种换元. 这时如果想到了三角恒等式

$$1+\tan^2 t=\frac{1}{\cos^2 t},$$

那么就会作换元 $x=a\tan t,|t|\leqslant\frac{\pi}{2}$. 这样一来，

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{\cos t}{a},\ \mathrm{d}x=a\ \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}. \tag{5}$$

因此我们需计算(令 $v=\sin t$)

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t &= \int\frac{\mathrm{d}\sin t}{1-\sin^2 t}\\ &= \int\frac{\mathrm{d}v}{1-v^2}=\frac{1}{2}\left(\int\frac{\mathrm{d}v}{1-v}+\int\frac{\mathrm{d}v}{1+v}\right)\\ &= \frac{1}{2}(-\ln|1-v|+\ln|1+v|)+c\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right|+c.\end{aligned}$$

由(5)中的第一式，可知

$$\sin t=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

因此

$$\frac{1+v}{1-v}=\frac{1+\sin t}{1-\sin t}=\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{\sqrt{a^2+x^2}-x}=\frac{1}{a^2}(x+\sqrt{a^2+x^2})^2.$$

最后我们得到

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right)^2 + c$$

$$= \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + c - \ln a.$$

由于 $\log a$ 是一个常数,所以 $c - \ln a$ 仍是任意的常数,干脆写成

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + c. \quad \square$$

例 14 求 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$.

解 令 $u = 1+\sqrt{1+x}$,所以

$$1+x=(u-1)^2, \quad dx = 2(u-1)du.$$

我们有

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}} = 2\int\left(\frac{u-1}{u}\right)du = 2\int\left(1-\frac{1}{u}\right)du$$

$$= 2(u-\ln u)+c'$$

$$= 2(\sqrt{1+x} - \ln(1+\sqrt{1+x})) + c. \quad \square$$

在前面,我们把公式(3)的用法说成是“凑微分”和“作代换”两种,只是为了便于理解.实际上,这两者并没有严格的差别,本质上都是“换元”.请看下面的例子.

例 15 求 $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

解 如果能立即看出

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{x})',$$

那么就是“凑微分”:

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \sin\sqrt{x}\,d\sqrt{x} = -2\cos\sqrt{x} + c;$$

如果想到要去掉根号,那么就作换元 $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$,于是得到

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{\sin t}{t}t\,dt = 2\int \sin t\,dt$$

$$= -2\cos t + c = -2\cos\sqrt{x} + c,$$

得到的是同样的结果. $\square$

巧妙地作“换元”,不是一件简单的事,需要更多的练习,熟能生巧.但是,常规的办法必须学会.以例 13 为例,虽然那里的解法要长一些,但那是“正道”.下面列举一个十分巧妙的“换元”,令

$$x=\frac{t^2-a^2}{2t},\quad dx=\frac{t^2+a^2}{2t^2}dt.$$

容易算出

$$\sqrt{a^2+x^2}=\frac{t^2+a^2}{2t},$$

所以

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln t+c=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+c.$$

但是,这个换元谁能一下子想到?

机动灵活的处理,还可以见于下列例子.

例 16　求 $\int\sqrt{a^2+x^2}dx$.

解　照常理来说,应当作一个适当的变换,使根号不再出现.但是,如果我们先作分部积分,可以把问题转化为求一个已知的原函数.

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2+x^2}dx&=x\sqrt{a^2+x^2}-\int x d\sqrt{a^2+x^2}\\&=x\sqrt{a^2+x^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx\\&=x\sqrt{a^2+x^2}-\int\frac{a^2+x^2-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx\\&=x\sqrt{a^2+x^2}+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}-\int\sqrt{a^2+x^2}dx.\end{aligned}$$

移项整理之后,得

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

最后一个不定积分已在例 13 中求出,所以

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+c.\quad\square$$

练习题 6.2

1. 计算原函数:

(1) $\int\arctan x dx$;　　(2) $\int\arcsin x dx$;

(3) $\int x\operatorname{arccot} x dx$;　　(4) $\int x^2\arccos x dx$;

(5) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$；　　(6) $\int \sqrt{x}\ln^2 x\mathrm{d}x$；

(7) $\int x^2\cos x\mathrm{d}x$；　　(8) $\int \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$；

(9) $\int \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$；　　(10) $\int x^2\operatorname{ch} x\mathrm{d}x$；

(11) $\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$；　　(12) $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$.

2. 设 p 是一个 n 次多项式，试通过 p 的各阶导数来表示原函数

$$\int p(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x.$$

3. 计算 $\int xf''(x)\mathrm{d}x$.

4. 求原函数：

(1) $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int \frac{x}{x^2+4}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x}$；　　(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$；

(7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$；　　(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)}$；

(9) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$；　　(10) $\int \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx)^2}$（常数 $ab\neq 0$）；

(12) $\int \cos ax\sin bx\mathrm{d}x$（$a,b$ 为常数）；

(13) $\int \cos ax\cos bx\mathrm{d}x$；　　(14) $\int \sin ax\sin bx\mathrm{d}x$；

(15) $\int \sin^4 x\mathrm{d}x$；　　(16) $\int \sin^5 x\mathrm{d}x$；

(17) $\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x$；　　(18) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2-\sin^2 x}$；

(19) $\int \frac{\cos x\sin x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\mathrm{d}x$；　　(20) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x+\sin x}$；

(21) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a\cos x+b\sin x}$；　　(22) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}\mathrm{d}x$；

(23) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$；　　(24) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(25) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+(1+x^2)^{3/2}}}$；　　(26) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$；

(27) $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　　(28) $\int x^3\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$；

(29) $\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$；　　(30) $\int x\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$；

(31) $\int \frac{x^{n/2}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}\mathrm{d}x\,(n\in\mathbf{N}^*)$；

(32) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$（$a$ 为常数）；

(33) $\int \frac{\cos x\sin x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$；

5. 推导出原函数

$$\int \ln^n x\,\mathrm{d}x\ (n\in\mathbf{N}^*)$$

的递推公式.

6. 用换元 $x=a\operatorname{sh} t$ 或 $x=a\operatorname{ch} t$ 解以下各题：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$；　　(2) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int (x^2+a^2)^{-3/2}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$.

7. 求原函数：

(1) $\int \left(1-\frac{2}{x}\right)^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

8. 求出函数 f，设

(1) $f'(x^2)=\frac{1}{x}\,(x>0)$；　　(2) $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$.

§6.3　有理函数的原函数

所谓有理函数，是指两个实系数多项式的商. 用式子来表示，就是形如

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

的函数，其中 P 与 Q 都是多项式，并且它们没有共同的零点．如果 P 的次数小于 Q 的次数，称 R 为真分式；如果 P 的次数不小于 Q 的次数，称 R 为假分式．通过做除法，我们总能将一个假分式表示成一个多项式加上一个真分式．例如 $\frac{x^5}{1-x^2}$ 是一个假分式，但如果我们进行下列运算

$$\begin{aligned}\frac{x^5}{1-x^2}&=\frac{x^5-x^3+x^3}{1-x^2}=\frac{x^3(x^2-1)+x^3}{1-x^2}\\&=-x^3+\frac{x^3-x+x}{1-x^2}=-x^3-x+\frac{x}{1-x^2},\end{aligned}$$

便将这个假分式表示成了多项式 $-(x+x^3)$ 加上真分式 $\frac{x}{1-x^2}$．由于多项式的原函数是容易求得的，我们只须研究如何求真分式的不定积分．

我们需要一个代数的定理．

定理 6.1 设 $R=\frac{P}{Q}$ 是一个真分式，其分母 Q 有分解式 $Q(x)=(x-a)^\alpha\cdots(x-b)^\beta(x^2+px+q)^\mu\cdots(x^2+rx+s)^\nu$，其中 $a,\cdots,b,p,q,\cdots,r,s$ 为实数，且 $p^2-4q<0,\cdots,r^2-4s<0$；$\alpha,\cdots,\beta,\mu,\cdots,\nu$ 为正整数，则

$$\begin{aligned}R(x)=&\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}+\cdots\\&+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_1}{x-b}\\&+\frac{K_\mu x+L_\mu}{(x^2+px+q)^\mu}+\cdots+\frac{K_1x+L_1}{x^2+px+q}+\cdots\\&+\frac{M_\nu x+N_\nu}{(x^2+rx+s)^\nu}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+rx+s},\end{aligned}$$

其中诸 $A_i,\cdots,B_i,K_i,L_i,\cdots,M_i,N_i$ 都是实数，并且这分解式的所有系数是惟一确定的．

我们在此不对这个定理给出证明，但要援引定理的结论．它的证明，大家可在复变函数课程中读到．

这个定理告诉我们，真分式总可以化成下列两类分式之和：

$$\frac{A}{(x-a)^k},\quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},\quad 此时\ p^2-4q<0.$$

这里 k 是正整数．因此，从原则上说，求真分式的原函数的问题，就已转化为求这两类真分式的原函数的问题．在求不定积分之前，让我们来实践一下如何把一个真分式化为“部分分式”（定理 6.1 称为“部分分式定理”）．

例1 化

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}$$

为部分分式.

解 因为它的分母有分解式

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3),$$

依定理6.1,有

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3},$$

这里 A 与 B 是待定的系数.去分母之后,得到

$$x+1=A(x-3)+B(x-1).$$

为了确定 A 与 B,有两种方法.第一种方法是,分别用 $x=1$ 与 $x=3$ 代入上式,得

$$-2A=2,\qquad 2B=4.$$

由此解出 $A=-1,B=2$.第二种方法是,比较上式双方一次项与常数项的系数,得出

$$A+B=1,\qquad 3A+B=-1.$$

从这线性方程组中可以解出 $A=-1,B=2$.因此,

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x-3}.\quad\square$$

例2 分解

$$\frac{x}{x^3+x^2+3x+3}$$

为部分分式.

解 首先将分母作分解,

$$x^3+x^2+3x+3=(x+1)(x^2+3).$$

依定理6.1,有

$$\frac{x}{x^3+x^2+3x+3}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+3},$$

这里 A,B,C 为待定的系数.从上式中去分母,得出

$$x=A(x^2+3)+(Bx+C)(x+1).$$

令 $x=-1$ 代入上式,得 $A=-\frac{1}{4}$.消去 A 之后,得

$$\frac{1}{4}x^2+x+\frac{3}{4}=(Bx+C)(x+1),$$

即

$$\frac{1}{4}x^2+x+\frac{3}{4}=Bx^2+(B+C)x+C.$$

比较平方项和常数项的系数,得出 $B=\frac{1}{4},C=\frac{3}{4}$. □

例3 化

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$$

为部分分式.

解 容易看出,分母有分解式 $x(x-1)^3$.因此,我们有

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

去分母之后,可得

$$x^3+1=A(x-1)^3+Bx+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2. \tag{1}$$

如果我们乘开上式右边,再合并同类项,比较双方系数,便得到含有未知量 A,B,C,D 的四个线性方程式,自然可以解出 A,B,C,D.但是,下面的作法也是值得推荐的.首先,令 $x=0$ 代入上式两边,立即得到 $A=-1$.从(1)中消去 A 之后,得到

$$2x^2-3x+3=B+C(x-1)+D(x-1)^2, \tag{2}$$

将 $x=1$ 代入(2),马上得出 $B=2$.这样,(2)转化为

$$2x^2-3x+1=C(x-1)+D(x-1)^2. \tag{3}$$

在(3)的等号两边分别对 x 求导,得

$$4x-3=C+2D(x-1). \tag{4}$$

在(4)中令 $x=1$,得到 $C=1$.最后,在(4)的等号两边分别对 x 再求导数,得出 $D=2$.

总的结果是:$A=-1,B=2,C=1,D=2$. □

现在回到求原函数的问题.由于

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x-a}=\ln|x-a|+c,$$

当 $k\geqslant 2$ 时,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k}=\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k}+c,$$

所以只需详细研究如何计算

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x,\ k\in\mathbf{N}^*.$$

经过配方,我们有

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

令 $a^2=q-\frac{p^2}{4}$，再作换元

$$u=x+\frac{p}{2},$$

使得到

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x=A\int\frac{u}{(a^2+u^2)^k}\mathrm{d}u+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}u}{(a^2+u^2)^k}.$$

右边的第一个不定积分十分容易求得：当 $k=1$ 时，

$$\int\frac{u}{a^2+u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\ln(a^2+u^2)+c;$$

当 $k\geqslant 2$ 时，

$$\int\frac{u}{(a^2+u^2)^k}\mathrm{d}u=\frac{1}{2(1-k)}(a^2+u^2)^{1-k}+c,$$

所以，最后只需讨论

$$I_k=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+u^2)^k},k=1,2,3,\cdots.$$

作分部积分

$$\begin{aligned}I_k&=\frac{u}{(a^2+u^2)^k}+2k\int\frac{u^2}{(a^2+u^2)^{k+1}}\mathrm{d}u\\&=\frac{u}{(a^2+u^2)^k}+2k\int\frac{a^2+u^2-a^2}{(a^2+u^2)^{k+1}}\mathrm{d}u\\&=\frac{u}{(a^2+u^2)^k}+2kI_k-2ka^2I_{k+1},\end{aligned}$$

由此推出

$$I_{k+1}=\frac{1}{2ka^2}\frac{u}{(a^2+u^2)^k}+\frac{2k-1}{2ka^2}I_k,\ k\in\mathbf{N}^*,$$

这是一个递推公式．反复利用这个公式可以把指标 k 降低，最后归结为已知的不定积分，最初的几个是：

$$\begin{aligned}I_1&=\int\frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+c,\\I_2&=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{u}{a^2+u^2}+I_1\right),\\I_3&=\frac{1}{4a^2}\left(\frac{u}{(a^2+u^2)^2}+3I_2\right).\end{aligned}$$

例4　计算

$$\int\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\mathrm{d}x.$$

解　由例3的结果，知所求积分可变形为

$$
-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3}+\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}
$$

$$
=-\ln|x|-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+\ln(x-1)^2+c
$$

$$
=\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}-\frac{x}{(x-1)^2}+c. \quad \square
$$

例 5 计算

$$
\int\frac{5x+6}{x^2+x+1}\mathrm{d}x.
$$

解 按照前面所指出的刻板的程序来求积分，固然能达到目的，但稍稍采用一点技巧，便可使计算过程简化. 因为

$$
\frac{5x+6}{x^2+x+1}=\frac{5}{2}\cdot\frac{(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)}+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{(x^2+x+1)},
$$

所以

$$
\int\frac{5x+6}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{7}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}
$$

$$
=\frac{5}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{7}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c. \ \square
$$

例 6 计算

$$
\int\frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\mathrm{d}x.
$$

解 这里 $x^2-2x+5=(x-1)^2+2^2$. 注意到

$$
\frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}=\frac{5}{2}\frac{(x^2-2x+5)'}{(x^2-2x+5)^2}+\frac{8}{(x^2-2x+5)^2},
$$

因此，欲求的不定积分是

$$
-\frac{5}{2}\frac{1}{(x^2-2x+5)}+8\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2}.
$$

利用递推公式来计算，上式成为

$$
-\frac{5}{2}\frac{1}{(x^2-2x+5)}+\frac{x-1}{x^2-2x+5}+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+c
$$

$$
=\frac{2x-7}{2(x^2-2x+5)}+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+c. \quad \square
$$

以上几个例子只是演示一下求有理函数的原函数的标准方法. 在实际问题中，计算是相当复杂的. 当分母的多项式的次数比较高时，且不说为了确定那些系数而解一个庞大的线性代数方程组所带来的麻烦，单单求 Q 的零点就相当麻烦.

练习题 6.3

求原函数：

1. $\int \frac{x}{2x^2-3x-2}\mathrm{d}x$；　　2. $\int \frac{2x^2+1}{(x+3)(x-1)(x-4)}\mathrm{d}x$；

3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^3+3x^2+x}$；　　4. $\int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}\mathrm{d}x$；

5. $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\mathrm{d}x$；　　6. $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}\mathrm{d}x$；

7. $\int \frac{8x^3+7}{(x+1)(2x+1)^3}\mathrm{d}x$；　　8. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$；

9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$；　　10. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^3}$；

11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^2}$；　　12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$；

13. $\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$；　　14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4(1+x^2)}$.

§6.4 可有理化函数的原函数

有些函数本身并不是有理函数，但是经过适当的换元之后，可以化为新的变元的有理函数．我们也认为求这一类函数的原函数的问题已经获得解决．下面我们来看一看哪些函数类可以作这样的转化．

形如

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}x^i y^j$$

的表达式称为 x 与 y 的**二元多项式**，其中 $a_{ij}\in\mathbf{R}$，叫做多项式的系数．如果 $R(x,y)$是两个二元多项式的商，则称 R 为**二元有理函数**．我们说 $R(\cos x,\sin x)$ 经过适当的换元之后便可以化成一元有理函数．我们设 $t=\tan\frac{x}{2}$，$|x|<\pi$，则由三角恒等式可得出下列简单的公式：

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}.$$

它们的证明如下:由 t 的定义,可得

$$\frac{1}{1+t^2}=\cos^2\frac{x}{2},\qquad \frac{t^2}{1+t^2}=\sin^2\frac{x}{2}.$$

并由基本公式

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2},$$

$$\sin x=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2},$$

即可得到上述公式.这两个公式说明,$\cos x$ 与 $\sin x$ 二者都能通过 $t=\tan\frac{x}{2}$ 表成 t 的有理函数.因为 $x=2\arctan t$,所以

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{1+t^2}.$$

这表明导数 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 也是 t 的有理函数.

我们已经证明,在作换元 $t=\tan\frac{x}{2}(|x|<\pi)$ 之后,求原函数

$$\int R(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$$

便转化为求原函数

$$\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

现在被积函数已变成了 t 的有理函数,而求有理函数的原函数问题,我们已有万无一失的办法.换元公式 $t=\tan\frac{x}{2}$ 或 $x=2\arctan t$,许多书上称之为"万能变换",就是这个缘故.

让我们看几个例子.

例 1 求

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x(1+\cos x)}.$$

解 作"万能变换"$t=\tan\frac{x}{2}$,原不定积分变为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\left(t+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t&=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}\ln|t|+c\\&=\frac{1}{4}\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c.\end{aligned}$$

对当前这个问题,不用"万能变换"而用其他的变换也能奏效.例如,可设 $t=\cos x$,由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sin^2 x(1+\cos x)}=\frac{-\mathrm{d}t}{(1-t^2)(1+t)}$$

$$=\frac{-1}{2(1+t)}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{-\mathrm{d}t}{2(1+t)^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\mathrm{d}t,$$

因此

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$=\frac{1}{2(1+t)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+c$$

$$=\frac{1}{2(1+\cos x)}+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)+c.\quad\square$$

下面的例子表示，将被积函数作适当的变形，有时甚至无需作任何换元，便可求得原函数.

例 2　计算

$$\int\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

解　由于

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}$$

$$=\tan^2 x-\sin^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1-\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{3}{2},$$

可得

$$\int\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{3}{2}x+c.\quad\square$$

我们已经看到："万能变换"虽然总可以将 $R(\cos x,\sin x)$ 有理化，但对具体问题而言，"万能变换"不一定总是必要的或方便的.

接着我们指出，对形如

$$R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$$

的函数求原函数问题也可以有理化，这里 n 表示正整数. 同前面的叙述一样，R 表示二元有理函数. 不妨设 $ad\neq bc$，否则 $\frac{ax+b}{cx+d}$ 是一个常数，这时被积函数已是有理函数了.

为了去掉根号，作换元

$$t=\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n},\quad \text{即 } t^n=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

由此解出

$$x=\frac{dt^n-b}{-ct^n+a}.$$

明显可见，这时$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$是 t 的有理函数.因此，新的被积函数就成了有理函数.

例 3 计算 $\int\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\mathrm{d}x$，其中 $a<x<b$.

解 建议读者用刚才指出的那个一般的原则来解这一道题目，体会一下个中的滋味.

下列灵巧的办法被构思出来，是讲得出道理的.第一，希望把根号去掉；第二，恒等式

$$\frac{x-a}{b-a}+\frac{b-x}{b-a}=1$$

启发我们作下列换元：

$$\frac{x-a}{b-a}=\sin^2 t,\ t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

这时，$\frac{b-x}{b-a}=\cos^2 t$.由此得出

$$\mathrm{d}x=2(b-a)\cos t\sin t\mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}=\tan t.$$

从而

$$\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\mathrm{d}x=(b-a)(1-\cos 2t)\mathrm{d}t.$$

于是

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\mathrm{d}x&=(b-a)(t-\cos t\sin t)+c\\&=(b-a)\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}-\sqrt{(b-x)(x-a)}+c.\quad\square\end{aligned}$$

还有许许多多类型的函数，可化作有理函数来求原函数，如果一一罗列出来，未免过于烦琐.我们以为，最要紧的是要学会最基本的处理办法.例如，考虑

例 4 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.

解 虽说我们还没有碰到过这种类型的被积函数，但是记住"去掉根号"这一要点，就会得到启发.这里有两个根号，为了同时去掉它们，可令 $x=t^6$.这时

$dx=6t^5dt$，我们有

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}&=6\int\frac{t^5}{t^3(1+t^2)}dt=6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt\\&=6(t-\arctan t)+c\\&=6(x^{1/6}-\arctan x^{1/6})+c.\quad\square\end{aligned}$$

我们已经发现，求原函数比求导函数要困难得多，复杂得多. 这并不奇怪. 就像对于小学生来说：做加法容易，做减法比较困难；做乘法容易，做除法比较困难. 做逆运算比较困难，似乎是数学学习中相当普遍的现象. 前面我们已经说过，要写出一个不能求出其导数的函数是非常不容易的事，但是，可以随手写出一大批求不出原函数的函数，例如

$$\int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int e^{-x^2}dx,\ \int\sin x^2dx.$$

在第 7 章中将要证明，这些函数的原函数其实是存在的，不过它们不是初等函数.

17 世纪和 18 世纪，数学家们曾经全神贯注地寻找各种能明确地求出原函数来的初等函数，从中发明了大量的巧妙方法. 后来，人们认识到以封闭形式来表达一切初等函数的原函数不但是做不到的，而且实际上也并不重要. 于是，那些针对一些特殊类型的函数构想出来的冗长烦琐的处理方法就不再受到注意.

现在，已经出版了许许多多的详细的《积分表》. 读者在实际问题中遇到你竭尽全力还求不出的原函数时，建议你到《积分表》中去找答案.

练习题 6.4

1. 求原函数：

(1) $\int\frac{\sin^3x}{\cos^4x}dx$；　(2) $\int\frac{dx}{\cos^4x\sin x}$；

(3) $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$；　(4) $\int\frac{\cos x\sin x}{\cos x+\sin x}dx$；

(5) $\int\frac{\sin x}{1+\cos x+\sin x}dx$；　(6) $\int\frac{\sin^2x}{1+\sin^2x}dx$；

(7) $\int\frac{dx}{\cos^4x+\sin^4x}$；　(8) $\int\frac{dx}{\cos^4x\sin^4x}$；

(9) $\int\frac{\sin x}{\cos^3x+\sin^3x}dx$；　(10) $\int\sqrt{\tan x}\,dx$；

(11) $\int\frac{dx}{1+\epsilon\cos x}$（常数 $\epsilon>1$）.

2. 求原函数：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{1+x}}$；　(2) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$；　(4) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$；　(6) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x^2}}\mathrm{d}x$；

(7) $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$；

(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2-x^2}}, |x|<a, x\neq 0$；

(9) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$；　(10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2(x+b)^3}$；

(11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^m(x+b)^n}, m, n\in \mathbf{N}^*$；

(12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}}, n\in \mathbf{N}^*$.

第 7 章　函数的积分

现在,我们转到微积分学的另一个主题——单变量函数的积分学.在引进导数概念之前,我们曾举出了来自三个方面的例子,说明导数概念产生的背景,以及建立这一概念的必要性.由于“积分”也是一个十分重要的概念,这里我们最好也先从几个例子看起.

§7.1　积分的概念

为了引进积分的概念,先来看三个例子.第一个例子是曲边梯形的面积.

从计算面积来导出积分概念,是最直接、最直观的方式.设函数 f 在$[a,b]$上有定义,暂时设 $f(x)>0$ 对 $x\in[a,b]$成立.我们把由横轴、平行直线 $x=a$ 和 $x=b$ 以及曲线 $y=f(x)$所围成的图形称为曲边梯形(图 7－1),原因是如果函数 f 是一次(或称线性)函数,那么所围成的图形就确实是一个梯形了.“曲边梯形”只是此时此地所使用的一个名词,为的是行文的方便,它不是一个在数学中普遍适用的术语.

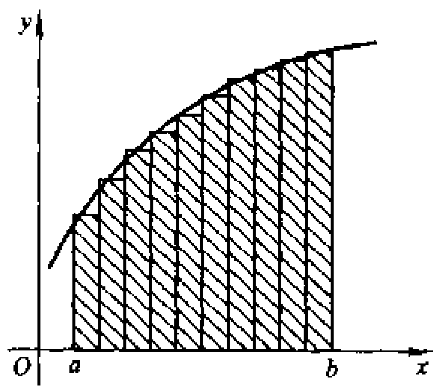

图 7－1

在§1.12 中,我们是对由 $y=x^2$ 为曲边所围成的曲边梯形来计算它的面积的.但是,那里所提出的基本思想在这里仍然有效.所说的基本思想是:把这块面积用平行于纵轴的直线分成若干小条,用一个矩形的面积作为每一个小曲边梯形面积的近似值,将这若干个近似值求和,作为曲边梯形的面积的一个近似值,然后把分割无限“加密”,把最后的极限(如果存在的话)就定义为曲边梯形的面积.在§1.13 中,我们是把区间等分,而在当前,为了排除各种可能的偶然性,不能做得如此简单粗糙.区间$[a,b]$的一个分割,是指由有限个点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 组成的集合,它们满足

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b, \tag{1}$$

子区间$[x_{i-1},x_i]$称为这分割的第 i 个子区间,其长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}, i=1,2,\cdots,n$.在第 i 个子区间上,任意地取定一点 ξ_i(而不能只是取子区间的端点、区间的中点以及任何其他特殊的点,以排除偶然性),用 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 来近似第 i 个曲边梯形的面积,再用和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{2}$$

来代替曲边梯形的面积.如果我们就停止在这一步上,(2)只能是面积的一个近似值.因此,必须把分割加密.加密的过程就是一种极限过程,姑且写为

$$\lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

问题是,我们对什么东西来取这个极限,是不是令 $n\to\infty$? 显然不是,因为 $n+1$ 只是分点的个数,即使把 n 取得很大,也不能说明已分得很细,例如说,固定 $x_0=a, x_1=\dfrac{a+b}{2}$,其他的分点都加在$\left(\dfrac{a+b}{2},b\right]$之间,那么无论 n 取多么大,对我们都没有帮助.为此,我们把由分点序列(1)组成的分割记为 π,令

$$\|\pi\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\},$$

称$\|\pi\|$为分割的**宽度**.很明显,分割宽度的大小能反映分割是不是细密,所以上述极限的恰当表示是

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

如果这个极限存在,即对 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$的所有可能的选法得出的极限是同一个数,那么这个数自然就定义为曲边梯形的面积.

第二个例子是一个物理问题.我们知道,一个方向不变、大小为常数的力 F,使物体沿力的方向移动距离 d,力所做的功是 Fd.如果力的方向不变,力的大小随点的位置面变化,这时如何来计算力所做的功呢? 更精确地说,是如何来定义力所做的"功"呢? 取一数轴,使其正方向与力的方向一致.物体在力的作用下由点 a 移动到点 b.设力的大小是点 x 的函数 $f(x), x\in[a,b]$.作分割 $\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$.取 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 作为在第 i 段路程$[x_{i-1},x_i]$上功的近似值,这里 ξ_i 是在$[x_{i-1},x_i]$上任取的,$i=1,2,\cdots,n$.这个想法是合理的,因为当$\|\pi\|$很小的时候,每一个子区间$[x_{i-1},x_i]$都不长,我们至少可以如此来设想:函数 f 在其上的变化不大,因此很自然地将

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

来作为功的定义.当然应当假设这个极限的存在性和数值不依赖于 ξ_i 在第 i 个子区间上的选取.

第三个例子是:如果我们已知一个非均匀棒的密度分布,如何去求(实际上是“定义”)棒的总质量?这正是§3.1例2中那个问题的反问题.请读者自己思考这个问题,便不难发现问题最后又归结到上述那种类型的极限.

定义 7.1 函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有定义.如果实数 I 使得对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,只要 $[a,b]$ 的分割 π 适合 $\|\pi\|<\delta$ 而不管 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 如何选择,都有

$$\left|I-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|<\varepsilon$$

成立时,称 f 在 $[a,b]$ 上(Riemann)**可积**,称 I 是 f 在 $[a,b]$ 上的(Riemann)**积分**.

函数 f 的积分通常用符号

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{3}$$

来表记.在其中,a 与 b 分别称为积分的**上限**和**下限**,f 称为**被积函数**,$f(x)\mathrm{d}x$ 叫做**被积表达式**.字母 x 没有什么特殊的作用,可用任何其他字母来代替.例如,当 f 在 $[a,b]$ 上可积的时候,$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ 与(3)表示的是同一个实数.

还有一些与可积和积分有关的名词,需要在此加以定义.如果 π 是由(1)式所确定的分割,则称 $\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 为 π 的**分点序列**;和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

称为 f 的 Riemann 和(也叫**积分和**),$\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ 称为这积分和的**值点序列**.

由积分的定义 7.1 立即看出,积分有以下简单的性质:

1° 设 f 在 $[a,b]$ 上可积且非负,那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0;$$

2° 设 f 与 g 在 $[a,b]$ 上可积,并且 $f\geqslant g$ 在 $[a,b]$ 上成立,那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x;$$

3° 如果 f 与 g 在 $[a,b]$ 上可积,那么 $f\pm g$ 在 $[a,b]$ 上也可积,并且

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x;$$

4° 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积,那么对任何常数 c,cf 在 $[a,b]$ 上也可积,并且

$$\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x=c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这就是说,常数可以提到积分号外来.

这些性质都可以由积分的定义立刻推出来,请读者自己完成证明.

例 1 证明 $\int_a^b 1\mathrm{d}x = b - a$.

证明 目前 $f(x) = 1, x \in [a, b]$. 对分割 π(见(1)式)作积分和:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

因此,对任何分割 π 以及 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 的任何取法,都有

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = b - a.$$

依定义 7.1,得

$$\int_a^b 1\mathrm{d}x = b - a. \quad \Box$$

积分 $\int_a^b 1\mathrm{d}x$ 常直接写成 $\int_a^b \mathrm{d}x$. 由此可知,对任何常数 c,有

$$\int_a^b c\mathrm{d}x = c\int_a^b \mathrm{d}x = c(b - a).$$

例 2 计算 $\int_a^b x\mathrm{d}x$.

解 对分割 π(见(1)式)作积分和

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i.$$

其中 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 是任取的. 这种任意性使得我们很难控制它,所以先用这子区间的中点 $\eta_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ 来代替 ξ_i,然后估计这种代替所引起的误差. 下面是操作的过程:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)\Delta x_i. \tag{4}$$

(4)式右边的第一个和是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \eta_i \Delta x_i &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (x_{i-1} + x_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2),\end{aligned}$$

它是一个常数. 由于 ξ_i, η_i 是第 i 个子区间上的两点,所以

$$|\xi_i - \eta_i| \leqslant \Delta x_i \leqslant \|\pi\|, i = 1, 2, \cdots, n.$$

进而有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)\Delta x_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|\Delta x_i\leqslant\|\pi\|\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$$

$$=\|\pi\|(b-a).$$

由(4)式得出

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i-\frac{b^2-a^2}{2}\right|\leqslant\|\pi\|(b-a).\tag{5}$$

由此看出,对任给的 $\epsilon>0$,可取 $\delta=\frac{\epsilon}{b-a}$.凡分割 π 满足 $\|\pi\|<\delta$ 时,不论 ξ_i 在第 i 个子区间如何选择,从(5)式都可得出

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i-\frac{b^2-a^2}{2}\right|<\epsilon.$$

依定义 7.1,这正是

$$\int_a^b x\mathrm{d}x=\frac{b^2-a^2}{2}.\quad\square$$

从几何上看,这个结果是明显的.函数 $f(x)=x$ 与 $x=a$, $x=b$ 和x 轴所围成的图形是一个梯形,而不只是曲边梯形.这个梯形的两底分别是 a,b,高是 $b-a$,所以它的面积是

$$\frac{1}{2}(a+b)(b-a)=\frac{1}{2}(b^2-a^2).$$

与积分的结果无异.(在做这种几何解释的时候,a 与 b 应是正数,做积分的时候无须这种约束.)

这么一个简单的结果,如果按定义 7.1 来计算,要经过上述不算简单的推导才可以得到.由此可见,我们应寻求简便快捷的办法来计算积分.

由于在$[a,b]$上连续的函数 f 在$[a,b]$上一致连续,从积分的定义看出,只要 $\|\pi\|$ 足够小,那么在同一子区间$[x_{i-1},x_i]$上,函数 f 在任意两个点处所取的值就会充分靠近,因此无论在这区间上选怎样的 ξ_i,所生成的 Riemann 和的差别也就无足轻重.这使我们有一种预感:区间$[a,b]$上的连续函数,一定是可积的.我们将在§7.5 中给出这一事实的证明.在下面的讨论中我们先承认这一事实.

下面的定理 7.1 称为 Newton - Leibniz **公式**,是一个非常重要的定理.在这里,我们的主要目的是希望利用它来尽快地学会计算积分.到了§7.3,我们还要回到这个公式上来,用不同的方法再作证明,还要讨论它的其他的意义.

定理 7.1(Newton - Leibniz 公式) 设函数 f 在$[a,b]$上可积,且在(a,b)上有原函数 F,如果 F 在$[a,b]$上连续,那么必有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).\tag{6}$$

证明 用分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 把区间$[a,b]n$ 等分，即 $x_i-x_{i-1}=\frac{1}{n}(b-a),i=1,\cdots,n$，于是

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}(F(x_i)-F(x_{i-1})). \tag{7}$$

对 F 应用微分中值定理，有

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}F'(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{8}$$

这里 $\xi_i\in(x_{i-1},x_i),i=1,\cdots,n$. 因为 f 在$[a,b]$上可积，故当$n\to\infty$时，(8)右端以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为极限. 今在(8)两端命 $n\to\infty$即得(6). □

这个定理指明了计算可积函数的积分的方法，那就是说，将求可积函数 f 的积分的问题，转化成为求 f 的原函数的问题. 这就是我们在第六章中用了那么多的时间来学习求原函数的种种方法的原因. 我们引入记号

$$F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

因此，(6)式便可写成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b, \tag{9}$$

也可以写成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\Big|_a^b,$$

这里 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 表示f 的不定积分中的任何一个. 注意到

$$\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,$$

那么(9)式可以更进一步写为

$$\int_a^b \mathrm{d}F(x)=F(x)\Big|_a^b. \tag{10}$$

看一些简单的例子.

例 3 我们有

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}. \quad \square$$

例 4 我们有

$$\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^\pi=2,$$

一般地，

$$\int_a^b \sin x\mathrm{d}x=\cos a-\cos b,$$

$$\int_a^b \cos x\mathrm{d}x = \sin b - \sin a. \quad \square$$

到此为止,我们已经学习过积分的定义和简单性质,而且学会了如何计算某些连续函数的积分,大家可以做大量的习题了.

一元函数积分的理论,到此并未充分地展开,虽然如此,我们还是可以利用已经学到的知识,做更多的一些事.例如说,可用来求某些数列的极限.

例 5 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)^{1/n}.$$

解 取对数,并令

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right),$$

右边的表达式可以看成是 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $[0,1]$ 上的一个特殊的 Riemann 和,这时 $[0,1]$ 被等分成了 n 个子区间,每一个子区间的长为 $\frac{1}{n}$,而 $\xi_i=\frac{i}{n}$ 是第 i 个区间的右端点.由于已知函数 $\ln(1+x)$ 在 $[0,1]$ 上可积,所以取均匀的分割并且选取对我们有利的、特殊的值点 ξ_i 做 Riemann 和后再取极限,一定会收敛到积分值.因此

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x.$$

用分部积分,可求出 $\ln(1+x)$ 的一个原函数

$$(1+x)\ln(1+x)-x.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ((1+x)\ln(1+x)-x)\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1,$$

所求的极限是 $\frac{4}{\mathrm{e}}$. $\square$

练习题 7.1

1. 利用积分的几何意义,求下列积分:

(1) $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\mathrm{d}x$; (2) $\int_a^b \left|x-\frac{a+b}{2}\right|\mathrm{d}x$.

2. 利用积分的定义,计算

$$\int_a^b x^2\mathrm{d}x.$$

3．利用积分的定义，计算

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2},\ b>a>0.$$

4．利用 Newton－Leibniz 公式，计算下列积分：

(1) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x, n\in\mathbf{N}^*$；

(3) $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}, 0\leqslant\varepsilon<1$.

5．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b \mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x, 0<a<b$.

6．证明下列不等式：

(1) $\int_0^{10} \frac{x\mathrm{d}x}{x^3+16}\leqslant\frac{5}{6}$；　　(2) $\frac{2}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}\leqslant\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x\leqslant 2\mathrm{e}^2$；

(3) $\int_0^{2\pi} |a\cos x+b\sin x|\mathrm{d}x\leqslant 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$；

(4) $\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x\leqslant\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}, m, n\in\mathbf{N}^*$.

7．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}, p>0$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(2+\cos\frac{k\pi}{n}\right)^{-1}$.

8．设 $a, b>0, f\in C[-a, b]$．又设 $f>0$ 且 $\int_{-a}^{b} xf(x)\mathrm{d}x=0$．求证：

$$\int_{-a}^{b} x^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant ab\int_{-a}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

9．证明：

(1) $\int_0^1 \frac{(1+x)^4}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{22}{3}-\pi$；

(2) $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{22}{7}-\pi$.

问题 7.1

1. 设凸函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，求证：

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

§7.2　可积函数的性质

可积的函数不一定在其积分区间上连续，但必须在这区间上有界.

定理 7.2　设 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

证明　设 f 在 $[a,b]$ 上的积分等于 I，依定义 7.1，对 $\varepsilon=1$，必存在一个分割 π，使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|<1.$$

这里，值点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 可以任取，$1\leqslant i\leqslant n$. 由上式可得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right|<|I|+1.$$

进而有

$$|f(\xi_1)|\Delta x_1<|I|+1+\left|\sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right|.$$

这也就是

$$|f(\xi_1)|<\frac{1}{\Delta x_1}\left(|I|+1+\left|\sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right|\right).$$

此时，把在 $[x_{i-1},x_i]$ 中的 ξ_i 固定下来，这里 $i=2,3,\cdots,n$，所以上式右边是一个确定的正数，ξ_1 是可以在 $[x_0,x_1]$ 上任意活动的. 这就证明了 f 在子区间 $[x_0,x_1]$ 上是有界的. 同样的说理表明，f 在子区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=2,3,\cdots,n)$ 上都是有界的，所以 f 在 $[a,b]$ 上必有界. □

由以上的定理可知，积分

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$

不存在，因为被积函数在 $(0,1]$ 上是无界的.

定理 7.3(积分的可加性)　设 $c\in(a,b)$，f 在 $[a,c]$，$[c,b]$ 上可积，那么 f

在$[a,b]$上也可积,并且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

证明 函数 f 在$[a,b]$上的可积性将从§7.6 的定理 7.17 的推论 6 中得到.等式(1)的正确性可由这三个积分的存在性通过对积分和取极限而得出. □

我们将在§7.6 中证明:如果 f 在$[a,b]$上可积,那么 f 必在$[a,b]$的任何一个子区间上可积.把这一结论与刚才证明的定理 7.3 结合起来,便得到:只要 f 在$[a,b]$上可积,对于任何一点 $c\in(a,b)$,都会有(1)成立.等式(1)所表达的性质,称为"积分的可加性".

到目前为止,我们仅对 $a<b$ 的情形定义了 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.当 $a=b$ 或 $a>b$ 时,定义积分的方式应使得可加性仍然成立.因此,我们必须定义

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0.$$

如果可加性成立,那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0.$$

因此,当 $a>b$ 时,应规定

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

在这里,右端的积分具有原来规定的意义.

下面的定理揭示了一个有用的性质。

定理 7.4 如果 f 在$[a,b]$上连续且非负,但 f 不恒等于 0,那么 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

证明 设有一点 $x_0\in[a,b]$,使 $f(x_0)>0$.由连续函数的性质可知,存在一个子区间$[\alpha,\beta]$,适合 $x_0\in[\alpha,\beta]\subset[a,b]$,使得对一切 $x\in[\alpha,\beta]$,有

$$f(x)\geqslant\frac{1}{2}f(x_0).$$

由积分的可加性知

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x+\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x+\int_\beta^b f(x)\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_\alpha^\beta\frac{f(x_0)}{2}\mathrm{d}x=\frac{f(x_0)}{2}(\beta-\alpha)>0.\end{aligned}$$

这就证完了定理 7.4. □

这一定理有一明显的推论:在$[a,b]$上连续且非负的函数 f,如果有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0.$$

那么 $f=0$.

定理 7.5(积分平均值定理) 设函数 f 与 g 在 $[a,b]$ 上连续, g 在 $[a,b]$ 上不改变符号,则存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 不妨设当 $x\in[a,b]$ 时 $g(x)\geqslant 0$ 但不恒等于 0. 由定理 7.4 知道 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>0$. 设 m 与 M 分别是 f 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值,于是

$$m\leqslant f(x)\leqslant M, a\leqslant x\leqslant b.$$

用 $g(x)$ 去乘上式,得到

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x).$$

求积分,得到

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

由此推出

$$m\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)^{-1}\leqslant M.$$

再据连续函数的介值定理,存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得

$$f(\xi)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)^{-1}.$$

由此推出欲证的定理. □

如果 f 在 $[a,b]$ 上可积, g 是 $[a,b]$ 上的单调函数,那么有所谓的"第二积分平均值定理",我们将在本书的第 11 章中讨论它.

在定理 7.5 中令 $g=1$,便得出

推论 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续,则存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

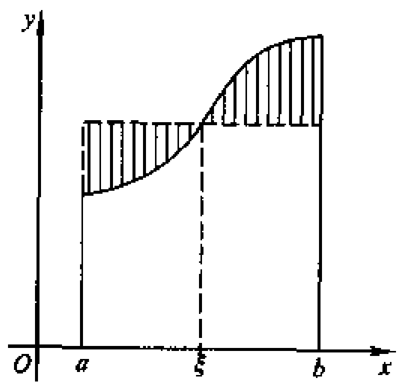

图 7-2

现在我们对这个推论作一个几何解释. 为此,不妨设 $f\geqslant 0$. 上式的左边代表一个曲边梯形的面积,而右边是一个矩形的面积. 这就是说,曲边梯形的面积可转化为一个矩形的面积,这个矩形的一边同曲线至少有一个交点,见图 7-2. 这意味着在这个图中,画有阴影线的两块图形的面积是相等的.

定理 7.5 只是证明了满足条件的点 ξ 的存在性，也许不止一个；与微分中值定理中那个 ξ 一样，一般来说是不可以精确定位的.

练习题 7.2

1. 设函数 f 与 g 在 $[a,b]$ 上连续，并且 $f(x) \leqslant g(x)$ 对一切 $x \in [a,b]$ 成立，又 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，求证：$f = g$.

2. 若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$ 对一切连续函数 g 成立，求证：$f = 0$.

3. 确定下列积分的正负：

   (1) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{1/2}^1 \mathrm{e}^x \ln^3 x\,\mathrm{d}x$.

4. 比较下列积分的大小：

   (1) $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$；

   (2) $\int_{-1}^0 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$；

   (3) $\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x}\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

   (4) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$.

5. 证明：

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-R\sin x}\mathrm{d}x \begin{cases} < \dfrac{\pi}{2R}(1-\mathrm{e}^{-R}), & \text{当 } R>0 \text{ 时；} \\ > \dfrac{\pi}{2R}(1-\mathrm{e}^{-R}), & \text{当 } R<0 \text{ 时；} \\ = \dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } R=0 \text{ 时.} \end{cases}$$

6. 求证：

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \pi,\quad n = 0,1,2,\cdots.$$

提示：将被积函数表示为余弦之和.

7. 利用上题结果，证明：

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 \mathrm{d}x = n\pi, n=0,1,2,\cdots.$$

8. f是$[0,1]$上的连续函数，且$f>0$，证明不等式

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant 1.$$

9. 在$[0,\pi]$上连续的函数f满足

$$\int_0^\pi f(\theta)\cos\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^\pi f(\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta = 0,$$

求证：f在$(0,\pi)$内至少有两个零点.

10. 设f,g在$[a,b]$上连续，证明 Cauchy - Schwarz 不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

问题 7.2

1. 证明不等式

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x \geqslant \frac{4}{3\sqrt{n}}, n\in \mathbf{N}^*.$$

当 $n\geqslant 2$ 时成立着严格的不等号.

2. 设连续函数f满足$\int_a^b x^i f(x)\mathrm{d}x = 0, i=0,1,2,\cdots,n$，证明：$f$在$(a,b)$内至少有 $n+1$ 个零点.

3. 函数f在区间$[a,b]$上连续且非负，令$M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n} = M.$$

4. 函数f在$[a,b]$上连续、非负且严格递增. 由积分平均值定理，对每个$p>0$，存在惟一的一点$x_p\in[a,b]$，使得

$$f^p(x_p) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(t)\mathrm{d}t,$$

求证：

$$\lim_{p\to+\infty} x_p = b.$$

5. 设f是一个n次多项式，且满足

$$\int_0^1 f(x)x^k\mathrm{d}x=0,\ k=1,2,\cdots,n,$$

证明：

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=(n+1)^2\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

§7.3 微积分基本定理

现在我们来研究"带变动上限的积分"．设 f 在 $[a,b]$ 上可积，那么对任何 $x\in[a,b]$，f 在 $[a,x]$ 上也可积．我们先承认这个事实，它的证明将在§7.6里完成．因此，可以定义函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

其中 x 可在 $[a,b]$ 上变化．例如说，可以认为 $F(a)=0$，而 $F(b)$ 就是 f 在 $[a,b]$ 上的积分．F 是由一个带有变动上限的积分所确定的函数．从几何上看，当对一切 $x\in[a,b]$ 有 $f(x)\geqslant 0$ 时，F 代表着一个变动的曲边梯形的面积，见图 7-3．可以很清楚地看到：当 x 获得一个很小的改变量 Δx 而变到 $x+\Delta x$ 时，函数 F 所得到的改变量就是夹在过点 $(x,0)$ 与 $(x+\Delta x,0)$ 并平行于纵轴的两条直线之间的那块面积，而这块面积的绝对值一定不超过一块矩形的面积 $M|\Delta x|$，这里 M 表示 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上的一个上界，这就说明 F 是一个连续函数．

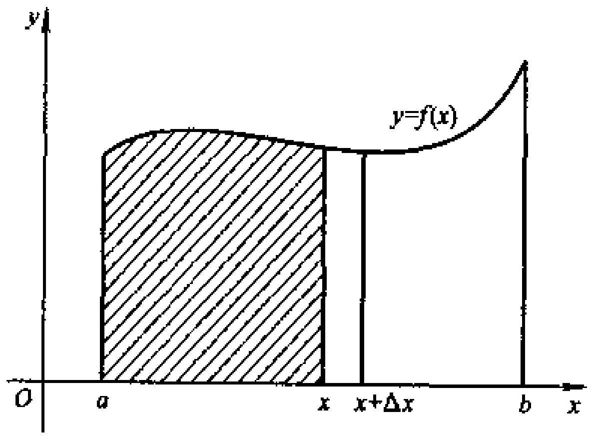

图 7-3

定理 7.6 设 f 在 $[a,b]$ 上可积，那么带变动上限的积分 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上连续．

证明 任取一点 $x_0\in(a,b)$，由于

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\int_a^{x_0+h}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_0}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^{x_0+h}f(t)\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{a}f(t)\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\mathrm{d}t,$$

这里的 h 可正可负，但 $x_0+h\in[a,b]$.

设 M 是 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上的一个上界，即对于一切 $t\in[a,b]$ 成立着

$$-M\leqslant f(t)\leqslant M.$$

当 $h>0$ 时，对上式作积分，得

$$-Mh\leqslant\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\mathrm{d}t\leqslant Mh;$$

当 $h<0$ 时，得到

$$Mh\leqslant\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\mathrm{d}t\leqslant -Mh.$$

总之，

$$|F(x_0+h)-F(x_0)|=\left|\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant M|h|.$$

这正表明 F 在 $x_0\in(a,b)$ 处连续. 上述的证明经过很显然的修改之后，可适用于 $x_0=a$ 与 $x_0=b$ 的情形. □

如果再加上 f 连续的条件，可以证明 F 有更好的性质. 具体地说，我们有

定理 7.7 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，在一点 $x_0\in[a,b]$ 处连续，那么 F 在 x_0 处可导并且

$$F'(x_0)=f(x_0).$$

证明 我们已经得到

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\mathrm{d}t.$$

由于 f 在 x_0 处连续，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|t-x_0|<\delta$ 且 $t\in[a,b]$ 时，有

$$f(x_0)-\varepsilon<f(t)<f(x_0)+\varepsilon.$$

因此，只要 $0<|h|<\delta$，通过对上式对 $t\in[x_0,x_0+h]$ 求积分，便可得出

$$f(x_0)-\varepsilon\leqslant\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\mathrm{d}t\leqslant f(x_0)+\varepsilon,$$

也就是

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|\leqslant\varepsilon,$$

当 $0<|h|<\delta$ 时成立.按导数的定义,这就是

$$F'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0).\quad\square$$

由此得到下列十分重要的

定理 7.8(微积分基本定理) 设函数 f 在$[a,b]$上连续,那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x),x\in[a,b].$$

上式可以用语言解释为:带变动上限的积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 f 的一个原函数,这就是第 6 章中把原函数也说成是“不定积分”的道理.这个定理蕴含着:$[a,b]$上的连续函数一定有原函数.

设 F 是 f 在$[a,b]$上的任一原函数,因此 F 与 f 在$[a,b]$上的带变动上限的积分只相差一个常数,即

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+c,\ x\in[a,b].$$

用 $x=a$ 代入上式,可得出 $c=F(a)$.于是

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a).$$

由于 $F'(t)=f(t)$对 $t\in[a,b]$成立,于是得到

定理 7.9 如果函数 F 在$[a,b]$上有连续的导函数,那么

$$\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a),\ x\in[a,b].$$

定理 7.9 是微积分基本定理的另一表现形式,也称为 Newton - Leibniz 公式.基本定理包含着两部分内容:一方面,它说的是一个函数的原函数可以通过带变动上限的积分来表示;另一方面,它是说积分一个函数的导数便可以还原到这个函数自身.定理的重要性在于沟通了导数和积分之间的关系,以及求导与求积分之间的关系.

例 1 设

$$F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\sin 2t\mathrm{d}t,\ x\in(-\infty,+\infty),$$

求 $F'(0)$与 $F'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

解 由于 $\mathrm{e}^{-t}\sin 2t$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续,按定理 7.8,我们有

$$F'(x)=\mathrm{e}^{-x}\sin 2x.$$

因此 $F'(0)=0,F'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^{-\pi/4}$. $\square$

例2　令

$$F(x)=\int_{x^2}^{0}\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t,$$

求 $F'(x)$.

解　由于

$$F(x)=-\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t,$$

记 $u=x^2$,由复合求导的链式法则,得

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-2x\sqrt{1+u^4}=-2x\sqrt{1+x^8}.\quad\square$$

练习题7.3

1. 利用 Newton－Leibniz 公式,计算下列积分:

(1) $\int_0^{\pi/2}(a\cos x+b\sin x)\mathrm{d}x$, a,b 为常数;

(2) $\int_0^{\pi/2}\cos mx\sin nx\,\mathrm{d}x$, m,n 为整数;

(3) $\int_1^4\frac{x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}\mathrm{d}x$.

2. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续并恒取正值,证明:

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$

是 $(0,+\infty)$ 上的严格递增函数.

3. 设 $[0,+\infty)$ 上的连续函数 f 满足关系

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}xf(x),\ x>0,$$

求证:$f(x)=cx$,这里 c 是常数.

4. 设 $(0,+\infty)$ 上的连续函数 f 使得积分值 $\int_a^{ab}f(x)\mathrm{d}x$ 与 a 无关,其中 $a,b>0$,

求证:$f(x)=\frac{c}{x}$,其中 c 为常数.

5. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续可导,求证:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

6. 已知 $f\in C(0,+\infty)$且对一切 $x>0$ 有

$$\int_x^{x^2} f(t)\mathrm{d}t=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t,$$

试求出满足上述条件的一切函数 f.

7. 函数 f 在$[0,1]$上有连续的导函数，且 $f(0)=0$，求证

$$\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 |f'(x)|^2\mathrm{d}x$$

8. 函数 f 在$[0,+\infty)$上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$. 证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=a.$$

问题 7.3

1. 设 f 在$[a,b]$上连续可导，$f(a)=0$. 证明：

(1) $\max\limits_{x\in[a,b]} f^2(x)\leqslant(b-a)\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x$;

(2) $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x$.

2. 设 f 在$[0,1]$上二阶连续可导，$f(0)=f(1)=0$，且当 $x\in(0,1)$时，$f(x)\neq0$. 求证：

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant4.$$

3. 设 f 在$[a,b]$上连续、递增，求证：

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

4. 设 $b>a>0$，证明不等式

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right)>\frac{2(b-a)}{a+b}.$$

5. 设 f 在$[0,1]$上有一阶导数，$f(0)=0$，并且 $0\leqslant f'(x)\leqslant1$. 求证：

$$\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

6. 若函数 f 连续可导，且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 求证：

$$\int_0^1 |f(x)-f'(x)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

7. 设函数 f 连续可导，$f(1)=1$，且当 $x\geqslant1$ 时有

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}.$$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在，且$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\leqslant 1+\frac{\pi}{4}$.

§7.4　分部积分与换元

有了 Newton - Leibniz 公式，计算积分的问题便化成了求原函数的问题.求原函数时有分部积分与换元两种技巧，求积分相应地也有这样两种技巧.

首先谈分部积分.对等式

$$u\mathrm{d}v=\mathrm{d}(uv)-v\mathrm{d}u,$$

两端作积分，得到

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x.$$

在这里，等式右边的第一项是由 Newton - Leibniz 公式得到的.上式便是积分的分部积分公式.

例 1　计算$\int_0^\pi x\cos x\mathrm{d}x$

解　既然可以利用分部积分先求出原函数$\int x\cos x\mathrm{d}x$，再代入上、下限的值，来算出积分，似乎没有必要再为积分作出分部积分公式.当前的这个例子，正是希望说明对积分做分部积分还是有许多便利之处的.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cos x\mathrm{d}x&=\int_0^\pi x\mathrm{d}\sin x=x\sin x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x\\&=-\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x=\cos x\Big|_0^\pi=-2.\end{aligned}$$

因为 $x\sin x$ 在 0 与 π 这两点处的值差等于 0，可以及早地将它除去.如果是求原函数，那么在计算的全过程中，始终应该带着这一项前进.　□

例 2　计算积分

$$\int_0^{\pi/2}\cos^m x\mathrm{d}x,\quad\int_0^{\pi/2}\sin^m x\mathrm{d}x,$$

这里 m 是任意的非负整数.

解　在§6.2 的例 5 中，我们求出了 $\cos^m x$ 与 $\sin^m x$ 的原函数.这里并不利用那里的结果，而是用积分的分部积分法直接计算.

令

$$I_m=\int_0^{\pi/2}\cos^m x\mathrm{d}x,\ m=0,1,2,\cdots,$$

不难看出,也有

$$I_m=\int_0^{\pi/2}\sin^m x\,dx.$$

这只需把积分解释为面积,看出图形 $y=\cos^m x$ 与 $y=\sin^m x$ 中的任一个关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 作反射就得到另一个.很明显,

$$I_0=\frac{\pi}{2},\quad I_1=1.$$

今设 $m\geqslant 2$,于是

$$\begin{aligned}I_m&=\int_0^{\pi/2}\cos^m x\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^{m-1}x\,d\sin x\\&=\cos^{m-1}x\sin x\Big|_0^{\pi/2}+(m-1)\int_0^{\pi/2}\cos^{m-2}x\sin^2 x\,dx\\&=(m-1)\int_0^{\pi/2}\cos^{m-2}x(1-\cos^2 x)\,dx\\&=(m-1)I_{m-2}-(m-1)I_m.\end{aligned}$$

由此得到递推公式

$$I_m=\frac{m-1}{m}I_{m-2},\ m\geqslant 2.$$

分别 m 为奇数与偶数的情形,便推出结果

$$I_{2n-1}=\left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)\left(\frac{2n-4}{2n-3}\right)\cdots\left(\frac{2}{3}\right)I_1.$$

引用如下数学记号:

$$1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)=(2n-1)!!,$$
$$2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)=(2n)!!,$$

便可将上式表成

$$I_{2n-1}=\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},\ n=1,2,3,\cdots.$$

类似地,

$$I_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2},\ n=1,2,3,\cdots.\quad\square$$

在第 4 章中,我们已经推得 Taylor 公式的两种余项,现在利用分部积分,可以得出

定理 7.10(Taylor 公式的积分余项) 设函数 f 在(a,b)上有直到 $n+1$ 阶的连续导函数,那么对任意固定的 $x_0\in(a,b)$,我们有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t,\ x\in(a,b).$$

证明 反复地利用分部积分,得到

$$\begin{aligned}
f(x)&=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(t)\mathrm{d}t\\
&=f(x_0)+(t-x)f'(t)\Big|_{x_0}^{x}-\int_{x_0}^{x}(t-x)f''(t)\mathrm{d}t\\
&=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)\\
&\quad-\left\{\frac{(t-x)^2}{2}f''(t)\Big|_{x_0}^{x}-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(t-x)^2f'''(t)\mathrm{d}t\right\}\\
&=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2f''(x_0)\\
&\quad+\frac{1}{3!}(t-x)^3f'''(t)\Big|_{x_0}^{x}-\frac{1}{3!}\int_{x_0}^{x}(t-x)^3f^{(4)}(t)\mathrm{d}t\\
&=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2f''(x_0)\\
&\quad+\frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3-\frac{1}{3!}\int_{x_0}^{x}(t-x)^3f^{(4)}(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

归纳得出

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}\int_{x_0}^{x}(t-x)^nf^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t,$$

即

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

这就是 Taylor 公式的积分余项. □

同第 4 章定理 4.3 相比较,这里所加的条件稍强,不仅要求 $f^{(n+1)}$ 存在,而且要求它连续.

从积分余项出发,也能推出 Lagrange 余项. 考虑积分

$$\int_{x_0}^{x}(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

被积函数中的 $(x-t)^n$,当 t 在 x_0 与 x 之间变化时保持定号. 利用积分中值定理,可得

$$\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t=f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\mathrm{d}t$$

$$=f^{(n+1)}(\xi)\frac{1}{n+1}(x-t)^{(n+1)}\Big|_{t=x}^{t=x_0}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 中间的一点. 于是

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

这正是 Taylor 公式的 Lagrange 余项.

现在来陈述并证明积分的换元公式.

定理 7.11 设函数 f 在区间 I 上连续, 且 $a,b\in I$, 函数 φ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导函数, $\varphi([\alpha,\beta])\subset I$, 且 $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

证明 设 F 是 f 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 依微积分基本定理,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

由复合求导的链式法则, 可知

$$(F\circ\varphi(t))'=F'\circ\varphi(t)\varphi'(t)=f\circ\varphi(t)\varphi'(t).$$

这表明 $F\circ\varphi(t)$ 是 $f\circ\varphi(t)\varphi'(t)$ 的一个原函数. 仍用 Newton - Leibniz 公式, 可知

$$\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t=F\circ\varphi(t)\Big|_\alpha^\beta$$

$$=F\circ\varphi(\beta)-F\circ\varphi(\alpha)=F(b)-F(a).$$

这就证明了

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t.\quad\square$$

例 3 证明: 对 $m\in\mathbf{N}^*$, 有

$$\int_0^{\pi/2}\cos^m x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\sin^m x\mathrm{d}x.$$

证明 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$. 所以, $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, 并且 $x=0$ 时 $t=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$ 时 $t=0$. 我们有

$$\int_0^{\pi/2}\sin^m x\mathrm{d}x=-\int_{\pi/2}^{0}\sin^m\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\cos^m t\mathrm{d}t.\quad\square$$

例 4 设 f 是以 T 为周期的连续函数, 求证:

$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x, \text{其中 } a\in\mathbf{R}.$$

这个事实说明:周期函数在任何一个长度等于其最小周期的区间上的积分值相等.

证明 把积分作分解:

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x.$$

对右边的第三个积分作换元 $x = t + T$,这时 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$,并且 $x = T$ 时 $t = 0$, $x = a + T$ 时 $t = a$. 我们便有

$$\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(t+T)\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\mathrm{d}t.$$

这表明:右边的第一个积分与第三个积分的和等于0,这样便得到

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x. \quad \square$$

例5 计算 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解 我们知道,中心在原点、半径等于1的圆在上半平面的方程是 $y = \sqrt{1-x^2}$. 因此,从几何上来看这个积分,乃是圆在第一象限那一部分的面积. 我们期望这个积分值是 $\frac{\pi}{4}$.

作换元 $x = \cos\theta$,于是 $\mathrm{d}x = -\sin\theta\mathrm{d}\theta$, $x = 0$ 对应着 $\theta = \frac{\pi}{2}$, $x = 1$ 对应着 $\theta = 0$. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x &= -\int_{\pi/2}^0 \sin^2\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

这里我们用到了例3的结论. $\square$

我们利用这个例子说明,换元定理中的 $\varphi(t)$ 当 t 从 α 变到 β 时,并不必须单调递增地扫过 $[a,b]$. 也就是说, $[a,b]$ 中的若干个点可以被 $\varphi(t)$ 扫过不只一次. 例如说,对例5中的题目仍取同样的变换,即令 $x = \cos\theta$,不过让 $[\alpha,\beta] = \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$,这时换元公式仍然有效:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x &= -\int_{3\pi/2}^0 \sqrt{1-\cos^2\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{3\pi/2} \sin\theta\,|\sin\theta|\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi} \sin^2\theta\mathrm{d}\theta - \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin^2\theta\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

由于 $\sin^2\theta$ 有周期 π,利用例4,最后一式等于

$$\int_{\pi/2}^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta-\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta$$

$$=\int_{-\pi/2}^{0}\sin^2\theta d\theta=\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta=\frac{\pi}{4},$$

得到了同样的结果.虽然如此,在能办到的情况之下,最好让 φ 单调地扫过区间 $[a,b]$,须知,当 φ 一往一复地扫过 $[a,b]$ 中的某一段的时候,所产生的积分值是正好正负互相抵消了.

例 6 计算 $\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x}$.

解

$$\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\pi/4}\frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{dt}{1+t}+\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{dt}{1-t}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}/2}=\frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2}).$$

在计算过程中,我们已经作了换元 $t=\sin x$. □

从上述例子中,我们看到用换元法来计算积分时,例如在例 6 中作变换 $x=\arcsin t$ 之后,最后不必再用变换 $t=\sin x$ 换回最初的变量 x,只是必须注意积分限的变化.这就是积分换元与不定积分换元差别之所在.

例 7 设 I 是一个开区间,函数 f 在 I 内连续.设 $a<b$ 且 $a,b\in I$,求证

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_a^b(f(x+h)-f(x))dx=f(b)-f(a).$$

曾经有一个学生给出了这样的"证明":

$$\lim_{h\to0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx=\int_a^b\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx$$

$$=\int_a^b f'(x)dx=f(x)\Big|_a^b=f(b)-f(a).$$

这是不正确的,有两处明显的漏洞:极限符号一般不可以同积分号交换;f 只是在 I 内连续,导函数 f' 可以不存在.

正确的证法如下:

证明 利用换元 $t=x+h$ 来变化积分,

$$\int_a^b f(x+h)dx=\int_{a+h}^{b+h}f(t)dt$$

$$=\int_a^b f(t)dt+\int_b^{b+h}f(t)dt-\int_a^{a+h}f(t)dt.$$

由积分中值定理,

$$\int_b^{b+h} f(t)\mathrm{d}t = f(\xi)h\text{，其中 }\xi\text{ 在 }b\text{ 与 }b+h\text{ 之间；}$$

$$\int_a^{a+h} f(t)\mathrm{d}t = f(\eta)h\text{，其中 }\eta\text{ 在 }a\text{ 与 }a+h\text{ 之间.}$$

故有

$$\frac{1}{h}\int_a^b (f(x+h)-f(x))\mathrm{d}x = f(\xi)-f(\eta).$$

所以，当 $h\to 0$ 时，由 f 的连续性知

$$\lim_{h\to 0} f(\xi) = f(b),\quad \lim_{h\to 0} f(\eta) = f(a),$$

立得要求证明的式子. □

练习题 7.4

1. 计算下列积分：

(1) $\int_0^{\pi} \sin^3 x\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos x\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\,\mathrm{d}x$；

(5) $\int_{-1}^0 (2x+1)\sqrt{1-x-x^2}\,\mathrm{d}x$；　　(6) $\int_{e^{-1}}^{e} |\ln x|\,\mathrm{d}x$；

(7) $\int_0^5 [x]\sin\frac{\pi x}{5}\mathrm{d}x$；　　(8) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$；

(9) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$；　　(10) $\int_0^1 x^n\ln x\,\mathrm{d}x,\ n\in\mathbf{N}^*$；

(11) $\int_0^a \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\mathrm{d}x,\ a>0$；

(12) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\sin x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x,\ ab\neq 0.$

2. 设 f 是 $\mathbf{R}$ 上的连续的偶函数，求证：

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x,$$

a 为任何正数.

3. 设 f 是 $\mathbf{R}$ 上的连续的奇函数，求证：

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

a 为任何正数.

4. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x=0.$$

5. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=0$.

6. 设 f 为连续函数，求证：

(1) $\int_0^{\pi/2}f(\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}f(\sin x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$.

7. 设函数 f 在区间 $[0,+\infty)$ 上递增，定义函数

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\ x\geqslant 0,$$

求证：φ 是 $[0,+\infty)$ 上的凸函数.

8. 函数 f 在 $[0,2]$ 上连续、可导，且 $f(0)=f(2)=1$. 如果 $|f'|\leqslant 1$，求证：

$$1\leqslant\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant 3.$$

9. 设函数 f 在 $[-1,1]$ 上可导，$M=\sup|f'|$. 若存在 $a\in(0,1)$，使得 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$，求证：

$$\left|\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M(1-a^2).$$

10. 证明：

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_x^{2\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=0.$$

11. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，对任何 $a>0$，求证：

$$\int_0^a\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)(a-x)\mathrm{d}x.$$

12. 设 $f\in C[-1,1]$，求证：

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=\pi f(0).$$

提示：先讨论特殊情形 $f=1$.

13. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续可导，求证：

(1) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x=0$;

(2) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0$.

注：若把 f 放宽成"在 $[a,b]$ 上可积"，结论仍然正确，那就是著名的 Riemann-Lebesgue 引理，本书第12章中将讨论它.

14. 在 $[-1,+\infty)$ 上定义函数

$$f(x)=\int_{-1}^{x}\frac{e^{1/t}}{t^2(1+e^{1/t})^2}dt,$$

试写出函数 f 的简单表达式.

15. 计算下列积分：

(1) $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{\cos x+\sin x}dx$； (2) $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x}{\cos x+\sin x}dx$.

问题 7.4

1. 设 f 是周期为 T 的连续函数，求证：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

2. 设

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nt}{\sin t}dt,\ n=1,2,\cdots$$

求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_n}{\ln n}$.

3. 令 $f(m,n)=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{m+k+1}, m,n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求证：$f(m,n)=f(n,m)$； (2) 试计算 $f(m,n)$.

4. 设 a,b,n 为正整数，令 $f(x)=\frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$. 求证：

(1) $f\left(\frac{a}{b}-x\right)=f(x)$；

(2) $f^{(k)}(x)(0\leqslant k\leqslant 2n)$ 当 $x=0, x=\frac{a}{b}$ 时取值为整数；

(3) 假设 π 是有理数，即 $\pi=\frac{a}{b}$，a,b 为既约正整数. 试证：$\int_0^{\pi}f(x)\sin x dx$ 为整数，由此证明 π 不可能是有理数.

5. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续，并且

$$\int_0^1 f(x)x^k dx=0,\ k=0,1,\cdots,n-1;\ \int_0^1 f(x)x^n dx=1.$$

求证：存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $|f(\xi)|\geqslant 2^n(n+1)$.

6. 设函数 f 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，且 $f(0)=f(1)=f'(0)=0, f'(1)=1$,

求证：

$$\int_0^1 (f''(x))^2 \mathrm{d}x \geqslant 4,$$

指出不等式中等号成立的条件.

§7.5 可积性理论

迄今为止，我们介绍了积分的定义和基本性质，通过 Newton－Leibniz 公式把求积分转化为原函数的计算，以及计算积分的分部积分和换元两种方法.有好几个定理，都是在"设 f 在$[a,b]$上可积"这一条件下叙述的.但是，哪些函数一定可积？这一问题还没有来得及讨论，甚至连续函数在有限闭区间上一定是可积的这一重要性质，也并没有彻底证明.此外，还有一些问题被遗留下来，例如说，若函数 f 在$[a,b]$上可积，为什么在它的任何一个子区间上也可积？当 f 在$[a,b]$上可积时，函数$|f|$是否在$[a,b]$上可积？这些问题有待于在以下两节中进一步研究.

由于可积函数必须是有界的，在讨论可积性的时候，我们总假设函数 f 在$[a,b]$上有界.用 M 与 m 分别记 f 在$[a,b]$上的上确界与下确界.令 $\omega=M-m$，称 ω 为 f 在$[a,b]$上的**振幅**.

对于$[a,b]$的任何分割

$$\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

在 π 的第 i 个子区间$[x_{i-1},x_i]$上 f 的上确界与下确界分别记为 M_i 与 m_i，并令 $\omega_i=M_i-m_i$，称之为 f 在$[x_{i-1},x_i]$上的振幅，这里 $i=1,2,\cdots,n$.

定义

$$\bar{S}(f,\pi)=\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i,\quad \underline{S}(f,\pi)=\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i,$$

并称它们是 f 关于分割 π 的**上和**和**下和**.容易看出，上和与下和是由被积函数 f 及分割 π 惟一确定的.在这一点上，它们同 f 关于分割 π 的积分和是不同的，这是因为积分和还与值点序列的选取有关.但是，在分割 π 取定之后，积分和就被相应的上和与下和所界定.精确地说，我们有：

$$\underline{S}(f,\pi)\leqslant \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant \bar{S}(f,\pi),$$

这里 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$是任取的.

设 π 是$[a,b]$的任意给定的分割，在 π 的分点的基础上多加一个分点，以

组成一个具有 $n+2$ 个分点的分割，记为 π'. 不失一般性，可设在第 i 个区间 $[x_{i-1},x_i]$ 内再加上一个分点 x^*. 也就是说，我们有

$$\pi': a=x_0<\cdots<x_{i-1}<x^*<x_i<\cdots<x_n=b.$$

这时，下和 $\underline{S}(f,\pi)$ 与下和 $\underline{S}(f,\pi')$ 的不同之处在于：前者的一项 $m_i\Delta x_i=m_i(x_i-x_{i-1})$ 被以下两项之和

$$(x^*-x_{i-1})\inf f([x_{i-1},x^*])+(x_i-x^*)\inf f([x^*,x_i])$$

所代替. 注意到上式不小于

$$\begin{aligned}&(x^*-x_{i-1})\inf f([x_{i-1},x_i])+(x_i-x^*)\inf f([x_{i-1},x_i])\\ &=(x^*-x_{i-1})m_i+(x_i-x^*)m_i\\ &=(x_i-x_{i-1})m_i=m_i\Delta x_i,\end{aligned}$$

由此可见

$$\underline{S}(f,\pi')-\underline{S}(f,\pi)\geqslant 0.$$

另一方面，显然有

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,\pi')-\underline{S}(f,\pi)&\leqslant M_i\Delta x_i-m_i\Delta x_i\\ &=\omega_i\Delta x_i\leqslant\omega\Delta x_i\leqslant\omega\|\pi\|,\end{aligned}$$

因此得到

$$\underline{S}(f,\pi)\leqslant\underline{S}(f,\pi')\leqslant\underline{S}(f,\pi)+\omega\|\pi\|.$$

类似地，我们可得

$$\overline{S}(f,\pi)-\omega\|\pi\|\leqslant\overline{S}(f,\pi')\leqslant\overline{S}(f,\pi).$$

我们直接推出

定理 7.12 设 $[a,b]$ 有两个分割 π 与 π'，并设 π' 是在 π 的分点上多加了 k 个新的分点而成，则

$$\underline{S}(f,\pi)\leqslant\underline{S}(f,\pi')\leqslant\underline{S}(f,\pi)+k\omega\|\pi\|,$$
$$\overline{S}(f,\pi)\geqslant\overline{S}(f,\pi')\geqslant\overline{S}(f,\pi)-k\omega\|\pi\|.$$

这个定理说的是，在分点加密的过程中，下和不减而上和不增.

设 π_1 与 π_2 是 $[a,b]$ 的两个分割，如果 π_1 的所有分点都是 π_2 的分点，我们称“分割 π_2 比 π_1 细”或者“分割 π_1 比 π_2 粗”，记为 $\pi_1\leqslant\pi_2$. 当然，并不是任何两个分割都可以比出粗细的. 但是，如果我们把 π_1 与 π_2 的分点都利用起来，以组成一个新的分割，记为 $\pi_1+\pi_2$，这时易见 $\pi_1+\pi_2\geqslant\pi_1$ 及 π_2. 由定理 7.12 可知

$$\underline{S}(f,\pi_1)\leqslant\underline{S}(f,\pi_1+\pi_2)\leqslant\overline{S}(f,\pi_1+\pi_2)\leqslant\overline{S}(f,\pi_2).$$

这表明：对任何两个分割来说，一个分割的下和总是不超过另一个分割的上和.

从这一事实看出，所有上和组成的集合有下界，从而有下确界. 我们用 $\overline{I}$ 来记上和的下确界，并称之为 f 在 $[a,b]$ 上的**上积分**. 同样的推理表明，全体下和

所成的集合是有上确界的,这个数值记为$\underline{I}$,称之为 f 在$[a,b]$上的**下积分**. 任何有界函数 f 的**下积分**与**上积分**都是存在的,并且有不等式

$$\underline{S}(f,\pi_1)\leqslant\underline{I}\leqslant\overline{I}\leqslant\overline{S}(f,\pi_2),$$

这里 π_1 与 π_2 是区间$[a,b]$的任何分割.

例如,在$[0,1]$上考察 Dirichlet 函数. 这时,任一下和都等于 0,任一上和都等于 1,因此这个函数在$[0,1]$上的下积分等于 0,而上积分等于 1.

进一步,我们可以证明下面的

定理 7.13(Darboux) 对$[a,b]$上的任意有界函数,有

$$\lim_{\|\pi\|\to0}\overline{S}(f,\pi)=\overline{I},\quad\lim_{\|\pi\|\to0}\underline{S}(f,\pi)=\underline{I}.$$

证明 我们证明第二个等式,第一个等式的证明是一样的. 按定义

$$\underline{I}=\sup_{\pi}\underline{S}(f,\pi),$$

对任给的 $\varepsilon>0$,存在$[a,b]$的一个分割 π_0,使得

$$\underline{S}(f,\pi_0)>\underline{I}-\frac{\varepsilon}{2}.$$

设分割 π_0 有 l 个"内分点". 我们指出,对$[a,b]$的任一分割 π,只要

$$\|\pi\|<\frac{\varepsilon}{2l\omega+1}$$

时,就一定有

$$\underline{S}(f,\pi)>\underline{I}-\varepsilon.$$

事实上,如果把 π_0 与 π 的分点合起来组成新的分割π',这时 π'是在π 的分点的基础上至多添加了 l 个分点,由定理 7.12 可得

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,\pi)&\geqslant\underline{S}(f,\pi')-l\omega\|\pi\|\\&\geqslant\underline{S}(f,\pi_0)-l\omega\|\pi\|\\&>\underline{I}-\frac{\varepsilon}{2}-l\omega\frac{\varepsilon}{2l\omega+1}\\&>\underline{I}-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=\underline{I}-\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了:

$$\lim_{\|\pi\|\to0}\underline{S}(f,\pi)=\underline{I}.\quad\square$$

现在容易给出有界函数 f 在$[a,b]$上可积的充分必要条件.

定理 7.14 设函数 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 有界,则以下三个条件互相等价:

1° f 在$[a,b]$上可积;

2° $\lim\limits_{\|\pi\|\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$,其中 $\omega_i=M_i-m_i$ 是f 在$[x_{i-1},x_i]$,$(i=1,\cdots,n)$ 上的振幅;

3° $\underline{I}=\overline{I}$

证明 我们将按照以下的途径"1°⇒2°⇒3°⇒1°"来证明它们的等价性.

设1°成立,记其积分值为 I.于是,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,对任意满足条件 $\|\pi\|<\delta$ 的分割 π,均有

$$I-\frac{\varepsilon}{3}<\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i<I+\frac{\varepsilon}{3}$$

对一切值点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i](i=1,\cdots,n)$成立.因而有

$$I-\frac{\varepsilon}{3}\leqslant\underline{S}(f,\pi)\leqslant\overline{S}(f,\pi)\leqslant I+\frac{\varepsilon}{3}.$$

从而有

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon<\varepsilon.$$

这正是2°.

再设2°成立.对任给的 $\varepsilon>0$,必存在$[a,b]$的一个分割 π,使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$.于是

$$0\leqslant\overline{I}-\underline{I}\leqslant\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的正数,所以必须有$\overline{I}=\underline{I}$.

最后设3°成立,设$\underline{I}=\overline{I}=I$,对于任意分割 π,总有

$$\underline{S}(f,\pi)\leqslant\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant\overline{S}(f,\pi),$$

两端取 $\|\pi\|\to0$ 的极限,由定理7.13,左右两端的极限都是 I,因而

$$\lim_{\|\pi\|\to0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=I.$$

这正说明 f 在$[a,b]$上可积. □

现在,我们来检查一下哪些函数类是可积的.

定理7.15 设 f 是定义在$[a,b]$上的单调函数,则 f 在$[a,b]$上可积.

证明 不失一般性,可设 f 是递增函数.若 $f(a)=f(b)$,这时 f 在$[a,b]$上是一常数,自然可积.所以设 $f(b)>f(a)$.

对任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$,只要分割 π 满足 $\|\pi\|<\delta$,这是便有

$$\begin{aligned}0\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i&=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i\\&=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\Delta x_i\leqslant\|\pi\|\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\\&=\|\pi\|(f(b)-f(a))<\delta(f(b)-f(a))=\varepsilon.\end{aligned}$$

依定理 7.14，f 在 $[a,b]$ 上可积. □

利用定理 7.14，我们可以证明 $[a,b]$ 上的连续函数一定可积.

定理 7.16 设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 是连续函数，则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

证明 由于 f 在 $[a,b]$ 上一致连续，对任给的 $\varepsilon>0$，必有 $\delta>0$，凡是 $s,t\in[a,b]$ 且 $|s-t|<\delta$ 时，便有

$$|f(s)-f(t)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

对于 $[a,b]$ 上的分割

$$\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

设

$$M_i=f(s_i),\quad m_i=f(t_i),$$

其中 $s_i,t_i\in[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$. 只要 $\|\pi\|<\delta$ 时，自然有

$$|s_i-t_i|\leqslant\Delta x_i\leqslant\|\pi\|<\delta,\ i=1,2,\cdots,n.$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}(f(s_i)-f(t_i))\Delta x_i\\ &\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 f 在 $[a,b]$ 上可积. □

在结束本节的时候，我们指出，如果 f 在 $[a,b]$ 上有界，并且在 $[a,b]$ 上只有有限多个间断点，那么 f 在 $[a,b]$ 上必定可积. 这一命题的证明虽然不难，但在这里不列出，因为这个结论以及其他许多关于可积性的结论，都可包含于下一节关于可积性的更彻底的讨论之中.

练习题 7.5

1. 设 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可积，求证：$|f|$ 和 fg 也在 $[a,b]$ 上可积.

2. 设 $p:[a,b]\to\mathbf{R}$. 如果有分割

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

使得在每一个子区间 (x_{i-1},x_i) $(i=1,2,\cdots,n)$ 上，p 为常值函数，则称 p 为 $[a,b]$ 上的**阶梯函数**. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积，求证：对任给的 $\varepsilon>0$，必存在 $[a,b]$ 上的阶梯函数 p 和 q，使得在 $[a,b]$ 上有 $p\leqslant f\leqslant q$，并且

$$\int_a^b (q(x)-p(x))\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

3. 设 f 在$[a,b]$上可积，求证：对任给的 $\varepsilon>0$，必存在$[a,b]$上的连续函数 p 和 q，使得在$[a,b]$上有 $p\leqslant f\leqslant q$，并且

$$\int_a^b (q(x)-p(x))\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

4. 设函数 f 在任一有限区间上可积，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$，求证：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=l.$$

5. 设函数 f 在$[a,b]$上可积，且对$[a,b]$内的任何子区间 Δ 上有 $\sup\limits_{\Delta}f\geqslant\sigma$，这里 σ 为一常数. 求证：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\sigma(b-a).$$

问题 7.5

1. 设函数 f 在$[0,1]$上可积，且有正数 m 和 M，使得 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 对 $x\in[0,1]$成立. 求证：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

2. 设 $f\in C[-1,1]$并满足条件：对$[-1,1]$的任何偶函数 g，积分

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x=0,$$

证明：f 是$[-1,1]$上的奇函数.

3. 设 $x(t)$在$[0,a]$上连续并且满足

$$|x(t)|\leqslant M+k\int_0^t|x(t)|\mathrm{d}t,$$

这里 M 与 k 为正常数，求证：

$$|x(t)|\leqslant M\mathrm{e}^{kt},\ t\in[0,a].$$

§7.6　Lebesgue 定理

在§7.5中，我们证明了有限区间上连续函数是可积的（定理7.16），还指出了在有限区间上有界，只有有限多个不连续点的函数也是可积的. 单调函数是可

积的，虽然单调函数可能有无限多个间断点，但是它的间断点的集合至多可数．这些事实提醒我们，可积性与函数的不连续点的“多寡”可能有着密切的关系．事实确实如此．为了精确地刻画“点的多寡”，我们必需引入下列定义．

定义 7.2 设 A 为实数的集合．如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在至多可数的一列开区间 $\{I_n, n\in\mathbf{N}^*\}$，它组成 A 的一个开覆盖，并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|I_n|\leqslant\varepsilon$（这里 $|I_n|$ 表示开区间 I_n 的长度），那么称 A 为**零测度集**，简称**零测集**．

显然空集是零测集．

例 1 如果 A 是至多可数的集，那么 A 一定是零测集．

证明 不妨设 A 为可数集

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}.$$

任给 $\varepsilon>0$，作区间 $I_n=\left(a_n-\dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}},a_n+\dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$，$n=1,2,\cdots$．显然，$A\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n$．这时

$$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|=\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}=\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon.$$

所以 A 是零测集．□

例 2 任何长度不为 0 的区间都不是零测集．

证明 不妨设所考虑的区间为开区间 (a,b)，其中 $a<b$．设开区间列 $\{I_n: n\in\mathbf{N}^*\}$ 覆盖了 (a,b)，很明显

$$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\geqslant b-a>0,$$

上式中不等号右边 $b-a$ 是一个确定的正数．□

零测集有如下的简单性质：

1° 至多可数个零测集的并集是零测集．

证明 设我们有可数个零测集

$$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots.$$

对任给的 $\varepsilon>0$ 和 $n\in\mathbf{N}^*$，由于 A_n 是零测集，故存在开区间族 $\{I_{ni}\}$，$i=1,2,3,\cdots$，使得 $A_n\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_{ni}$ 并且 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|I_{ni}|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2^n}$．这时开区间族 $\{I_{ni}: n, i\in\mathbf{N}^*\}$ 含可数的成员，且具有性质

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}I_{ni}\right);$$

此外

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|I_{ni}|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon.$$

这就证明了 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 为零测集. □

2° 设 A 为零测集,若 $B\subset A$,那么 B 也是零测集.

以下,为了讨论方便起见,设 I 是有限的开区间或闭区间,即

$$I=(a,b)\text{或 } I=[a,b].$$

f 是定义在 I 上的有界函数.当 $I=[a,b]$时,我们把 f 扩充到数轴上:当 $x<a$ 时令 $f(x)=f(a)$,而当 $x>b$ 时令 $f(x)=f(b)$.对于任何 $x\in I$ 和充分小的 $r>0$,命 $I_{x,r}=(x-r,x+r)$.

定义 7.3 设函数 f 在区间 I 上有界,用 $\omega_f(x,r)$表示函数 f 在 $I_{x,r}$上的振幅.设

$$\omega_f(x)=\lim_{r\to 0+}\omega_f(x,r),$$

称为**函数 f 在点 x 处的振幅**.

显然,$\omega_f(x,r)\geqslant\omega_f(x)\geqslant 0$.还容易证明

$$\omega_f(x,r)=\sup\{|f(y_1)-f(y_2)|:y_1,y_2\in I_{x,r}\}.$$

证明留给读者.

我们有

引理 7.1 函数 f 在点 $x\in I$ 处连续的必要充分条件是 $\omega_f(x)=0$.

证明 先证必要性.设 f 在点 x 处连续.对任给的 $\varepsilon>0$,当 $r>0$ 充分小时,可使得当 $y\in I_{x,r}$时便有

$$|f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以,当 $y_1,y_2\in I_{x,r}$时,

$$\begin{aligned}|f(y_1)-f(y_2)|&\leqslant|f(y_1)-f(x)|+|f(x)-f(y_2)|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

由此立得 $\omega_f(x,r)\leqslant\varepsilon$.令 $r\to 0+$,得出 $0\leqslant\omega_f(x)\leqslant\varepsilon$.由于 ε 是任意的正数,可见 $\omega_f(x)=0$.

再证充分性.设 $\omega_f(x)=0$.依定义 7.3 立知:对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $r>0$,使得 $\omega_f(x,r)<\varepsilon$.因此,对于任何 $y\in I_{x,r}$,必有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\omega_f(x,r)<\varepsilon.$$

这表明函数 f 在点 x 处连续. □

对于 $\delta>0$,记

$$D_\delta=\{x\in[a,b]:\omega_f(x)\geqslant\delta\}.$$

用 $D(f)$记 f 在$[a,b]$上不连续点的全体,即

$$D(f)=\{x\in[a,b]:f\text{ 在 }x\text{ 处不连续}\}.$$

我们有

引理 7.2 $D(f)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_{1/n}$

证明 由引理 7.1，$D_{1/n}$ 中的点都是 f 的不连续点，因而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{1/n}\subset D(f). \tag{1}$$

反之，任取 $x\in D(f)$，因 f 在 x 处不连续，仍由引理 7.1，$\omega_f(x)>0$，今取 m 充分大，使得 $\omega_f(x)\geqslant\dfrac{1}{m}$，即 $x\in D_{1/m}$，因而

$$D(f)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{1/n}. \tag{2}$$

由(1)和(2)即得本引理. □

引理 7.3 设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$，如果存在一列区间 (α_j,β_j)，$j=1,2,\cdots$，使得 $D(f)\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(\alpha_j,\beta_j)$，记 $K=[a,b]\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(\alpha_j,\beta_j)$，那么对任意 $\varepsilon>0$，一定存在 $\delta>0$，当 $x\in K$，$y\in[a,b]$ 且 $|x-y|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

证明 用反证法. 如果结论不成立，则必存在 $\varepsilon_0>0$ 以及 $s_n\in K$，$t_n\in[a,b]$，虽然 $|s_n-t_n|<\dfrac{1}{n}$，但仍有

$$|f(s_n)-f(t_n)|\geqslant\varepsilon_0. \tag{3}$$

因为 $\{s_n\}\subset K\subset[a,b]$，故必有 $\{s_n\}$ 的子列 $\{s_{k_n}\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}s_{k_n}=s^*,$$

显然 $s^*\in K$. 由于

$$\begin{aligned}|t_{k_n}-s^*|&\leqslant|t_{k_n}-s_{k_n}|+|s_{k_n}-s^*|<\frac{1}{k_n}+|s_{k_n}-s^*|\\&<\frac{1}{n}+|s_{k_n}-s^*|,\end{aligned}$$

由此即知 $t_{k_n}\to s^*\ (n\to\infty)$. 由(3)得

$$|f(s_{k_n})-f(t_{k_n})|\geqslant\varepsilon_0. \tag{4}$$

由于 $s^*\in K$，故 f 在 s^* 处连续. 在(4)左端让 $n\to\infty$ 即得

$$\varepsilon_0\leqslant|f(s^*)-f(s^*)|=0.$$

这和 $\varepsilon_0>0$ 矛盾. □

有了这些准备知识，我们可以来证明本节的主要定理.

定理 7.17(Lebesgue) 设函数 f 在有限区间 $[a,b]$ 上有界，那么 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的必要充分条件是 $D(f)$ 是一零测集.

证明 先证必要性.由引理7.2,只要证明 $D_{1/n}$ 是零测集.因为 f 可积,由定理7.14,对任给的 $\varepsilon>0$ 及 $n\in N$,存在$[a,b]$的一个分割

$$\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{n} \tag{5}$$

命 $E_n=D_{1/n}\setminus\{x_0,x_1,\cdots,x_m\}$,只要证明 E_n 是零测集就行了.由于

$$[a,b]\setminus\{x_0,x_1,\cdots,x_m\}=\bigcup_{i=1}^{m}(x_{i-1},x_i),$$

所以

$$\begin{aligned}E_n&=D_{1/n}\cap\Big(\bigcup_{i=1}^{m}(x_{i-1},x_i)\Big)\\&\subset\bigcup\{(x_{i-1},x_i):D_{1/n}\cap(x_{i-1},x_i)\neq\varnothing\},\end{aligned}$$

这说明 E_n 被一列开区间的并所覆盖,这列开区间中的每一个都含有 $D_{1/n}$ 的点.任取 $t\in D_{1/n}\cap(x_{i-1},x_i)$,因为 $t\in D_{1/n}$,所以 $\omega_f(t)\geqslant\frac{1}{n}$,又因 $t\in(x_{i-1},x_i)$,故必能取到充分小的 $r>0$,使得$(t-r,t+r)\subset(x_{i-1},x_i)$,于是

$$\omega_i=M_i-m_i\geqslant\omega_f(t,r)\geqslant\omega_f(t)\geqslant\frac{1}{n}. \tag{6}$$

如果用 $\sum{}'$ 表示对那些使得 $D_{1/n}\cap(x_{i-1},x_i)\neq\varnothing$ 的 i 求和,那么从(5)和(6)可得

$$\frac{\varepsilon}{n}>\sum_{i=1}^{m}\omega_i\Delta x_i\geqslant\sum{}'\omega_i\Delta x_i\geqslant\frac{1}{n}\sum{}'\Delta x_i,$$

即

$$\sum{}'\Delta x_i<\varepsilon.$$

这正好说明覆盖 E_n 的那列开区间的长度之和小于 ε,即 E_n 是零测集.

再证充分性.设 $D(f)$ 是一零测集.对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在一列开区间 (α_i,β_i),$i=1,2,\cdots$,使得

$$D(f)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i),\text{且}\sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i,\alpha_i)<\frac{\varepsilon}{2\omega},$$

这里 ω 是 f 在$[a,b]$上的振幅.命

$$K=[a,b]\Big\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i).$$

根据引理7.3,对上述的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $x\in K$,$y\in[a,b]$且$|x-y|<\delta$ 时,有 $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$.现取分割 $\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,使得

$\|\pi\|<\delta$.写

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum\nolimits_1 \omega_i \Delta x_i + \sum\nolimits_2 \omega_i \Delta x_i, \tag{7}$$

这里 $\sum_1$ 表示对 K 和(x_{i-1},x_i)相交的那些 i 求和，$\sum_2$ 表示对 K 和(x_{i-1},x_i)不相交的那些 i 求和.对 $\sum_1$ 中的项，因为 $K\cap(x_{i-1},x_i)\neq\varnothing$，任取 $y_i\in K\cap(x_{i-1},x_i)$，由引理 7.3 得

$$\begin{aligned}\omega_i &= \sup\{|f(z_1)-f(z_2)|:z_1,z_2\in[x_{i-1},x_i]\}\\ &\leqslant \sup\{|f(z_1)-f(y_i)|+|f(z_2)-f(y_i)|:z_1,z_2\in\\ &\qquad [x_{i-1},x_i],y_i\in K\cap(x_{i-1},x_i)\}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.\end{aligned}$$

所以

$$\sum\nolimits_1 \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

再看 $\sum_2$.这时 $\omega_i\leqslant\omega$，所以

$$\sum\nolimits_2 \omega_i \Delta x_i \leqslant \omega \sum\nolimits_2 \Delta x_i. \tag{9}$$

对于 $\sum_2$ 中的项，$K\cap(x_{i-1},x_i)=\varnothing$，故当 $x\in(x_{i-1},x_i)$时，$x\notin K$，因而 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i)$，即$(x_{i-1},x_i)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i)$.

所以

$$\sum\nolimits_2 \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i-\alpha_i) < \frac{\varepsilon}{2\omega},$$

代入(9)，即得

$$\sum\nolimits_2 \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

把(8)和(10)代入(7)即得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$.由定理 7.14 知道 f 在$[a,b]$上可积.

□

例 3 **Riemann** 函数(见§2.4 例 8)是任意有限区间$[a,b]$上的可积函数.

证明 这是因为 Riemann 函数在$[a,b]$中的无理上点都连续，在有理点不连续(见§2.4 例 8)，其不连续点的全体是一零测集，因而可积. □

推论 1 若 f 在$[a,b]$上只有至多可数的间断点，那么 f 在$[a,b]$上 Riemann 可积.

这是因为此时 $D(f)$是零测集.

推论 2 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积，那么 $|f|$ 也在 $[a,b]$ 上可积，并且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x. \tag{11}$$

由于 $D(|f|)\subset D(f)$，可知 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 至于不等式(11)可由积分的定义 7.1 证得.

注意，由 $|f|$ 的可积性一般不能导出 f 的可积性. 例如，设

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ -1, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}.\end{cases}$$

φ 在 $[0,1]$ 上不可积，但 $|\varphi|=1$ 是可积的.

推论 3 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积，$\dfrac{1}{f}$ 在 $[a,b]$ 上有定义并且有界，那么 $\dfrac{1}{f}$ 在 $[a,b]$ 上可积.

这是因为 $D(f)=D\left(\dfrac{1}{f}\right)$.

推论 4 设 f 与 g 在 $[a,b]$ 上可积，那么对任何实数 λ,μ，函数 $\lambda f+\mu g$ 在 $[a,b]$ 上可积；fg 在 $[a,b]$ 上也可积.

因为 $D(\lambda f+\mu g)\subset D(f)\cup D(g)$ 以及 $D(fg)\subset D(f)\cup D(g)$.

推论 5 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积，那么对于任何 $[c,d]\subset[a,b]$，f 在 $[c,d]$ 上也可积.

这是因为 $D(f;[c,d])\subset D(f;[a,b])$.

推论 6 如果 $c\in(a,b)$，那么当 f 在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上都可积时，f 在 $[a,b]$ 上也可积.

这是因为

$$D(f;[a,c])\cup D(f;[c,b])=D(f;[a,b]).$$

从积分的定义来看，Riemann 积分主要是为连续函数而设计的. 积分和的极限的存在性和数值不应受值点在分割的同一子区间的变化的影响，这实际上是对被积函数的连续性提出了很高的要求. 本节的理论更是把这种说法精确化了. Lebesgue 定理把 Riemann 可积的必要充分条件用连续点的多寡来刻画，得出了完满的结论. 定义在 $[a,b]$ 上的函数 f 至多在一个零测集上不连续，称 f 在 $[a,b]$ 上**几乎处处连续**. 因此，Lebesgue 定理也可以说成：区间 $[a,b]$ 上的有界函数 f 为 Riemann 可积的必要充分条件是 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续.

Lebesgue 放松了对函数连续性的要求，从而推广了 Riemann 积分，他所定义的积分被后人称为 Lebesgue 积分. 要详细地讨论 Lebesgue 积分，光有零测集是不够的，还需要把“测度”推广到相当广泛的集合——称之为可测集合——上去. 深入地讨论这些问题，已超出了数学分析的范围，它们是“实变数函数论”中的经典内容.

练习题 7.6

1. 记 $I_{x,r}=(x-r,x+r)$，$\omega_f(x,r)$ 为 f 在 $I_{x,r}$ 上的振幅，证明

$$\omega_f(x,r)=\sup\{|f(y_1)-f(y_2)|: y_1,y_2\in I_{x,r}\}.$$

2. 设 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可积，求证：$\max(f(x),g(x))$ 和 $\min(f(x),g(x))$ 在 $[a,b]$ 上可积.

问题 7.6

1. 对于 $\alpha\in(0,1]$，定义

$$f_\alpha(x)=\left[\frac{\alpha}{x}\right]-\alpha\left[\frac{1}{x}\right],$$

证明：

$$\int_0^1 f_\alpha(x)\mathrm{d}x=\alpha\ln\alpha.$$

2. 设 $f\geqslant 0$ 在 $[a,b]$ 上可积，求证：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$ 成立的必要充分条件是 f 在连续点处必取零值.

§7.7 反常积分

在以上定义的积分中，积分区间是一个有限的闭区间，而且可积函数必定是有界的. 但是，对于许多来自数学本身以及其他学科的问题，这两条限制显得过于苛刻. 因此，有必要推广已有的积分的概念. 如果说把我们已经详细讨论过的 Riemann 积分称作"通常意义下的积分"，那么推广了的积分就统称"反常积分".

反常积分可以分为两大类，第一类是指积分区间无界，简称为"无穷积分"，我们首先讨论这一类积分.

设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，对任何 $b>a$，函数 f 在 $[a,b]$ 上可积. 这时带变动上限 b 的积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

就定义了 $[a,+\infty)$ 内的一个函数. 如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在且有限,那么就把这个极限记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \tag{1}$$

并称上述积分**收敛**.如果那个极限不存在,同样也使用符号(1),不过这时它不代表任何数值,我们称无穷积分(1)是**发散的**.

在积分(1)收敛的场合,我们称函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上**可积**.

类似地,可以定义无穷积分

$$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x$$

的收敛和发散.

例1　设 $a>0$,求证:无穷积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$$

当 $p>1$ 时收敛,当 $p\leqslant 1$ 时发散.

证明　当 $p\neq 1$ 时,对任何 $b>a>0$,有

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_a^b=\frac{1}{1-p}(b^{1-p}-a^{1-p}).$$

由于

$$\lim_{b\to+\infty}b^{1-p}=\begin{cases}0, & \text{当 } p>1 \text{ 时};\\ +\infty, & \text{当 } p<1 \text{ 时}.\end{cases}$$

可见当 $p>1$ 时

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\frac{a^{1-p}}{p-1};$$

当 $p<1$ 时这个无穷积分发散.因为

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln b-\ln a\to+\infty\,(b\to+\infty),$$

所以当 $p=1$ 时无穷积分也发散.　□

设函数 f 在全数轴上有定义,并且在任何有界区间上都是可积的,任取 $a\in\mathbf{R}$,如果下列两个无穷积分

$$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x,\quad \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

都收敛,那么说无穷积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \tag{3}$$

收敛.并且,规定

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

我们也说 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积.

容易证明,上述定义实际上与 a 的选择毫无关系.

如果(2)中至少有一个发散,那么就称无穷积分(3)发散.

对于无穷积分,也有 Newton - Leibniz 公式.

定理 7.18 设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上可积,且有原函数 F,那么

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(a);$$

若 f 在 $(-\infty,a]$ 上可积,且有原函数 F,那么

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(-\infty);$$

若 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积,且有原函数 F,那么

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(-\infty),$$

其中

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x), \quad F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x).$$

证明 依定义,我们有

$$\begin{aligned}\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{b\to+\infty}(F(b) - F(a)) \\ &= \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) = F(+\infty) - F(a).\end{aligned}$$

仿此可以证明其他两个公式. □

很明显,Riemann 积分的运算性质和计算技巧都可以应用于无穷积分,其中的证明细节就不一一罗列了.

例 2 设 $a>0$,计算无穷积分

$$\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x, \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x.$$

解 分部积分,得

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x &= \frac{1}{b}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}\sin bx \\ &= \frac{1}{b}\left\{\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\Big|_{0}^{+\infty} + a\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x\right\}.\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\sin bx = 0$,所以

$$\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{a}{b}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x \tag{4}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{a}{b^2}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,\mathrm{d}\cos bx \\
&= -\frac{a}{b^2}\left\{ e^{-ax}\cos bx\Big|_0^{+\infty} + a\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x \right\} \\
&= -\frac{a}{b^2}\left\{ -1 + a\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x \right\} \\
&= \frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x .
\end{aligned}
$$

由此得

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{a}{b^2},$$

所以

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

把这结果代入(4)即得

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{b}{a^2+b^2}. \quad \square$$

例 3　计算

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}.$$

解　不妨设 $a>0$. 作换元 $x=a\tan t$. 当 t 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时, x 递增地从 0 变到 $+\infty$. 此外,

$$\mathrm{d}x = \frac{a}{\cos^2 t}\mathrm{d}t.$$

所以,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}. \quad \square$$

我们看到,一个无穷积分,经过换元之后变成了常义下的积分. 反过来,一个常义下的积分,经过换元之后也可变为无穷积分. 这种现象是可能经常发生的,不足为怪.

下面是一些物理学中的应用题.

例 4　计算将质量为 m 的物体由距离地心为 h 的地方移至无穷远处所做的功.

解　距离地心为 x 处质量为 m 的物体受地球的引力是

$$F(x) = k\frac{mM}{x^2},$$

其中 k 为引力常数，M 为地球质量. 所求之功等于

$$\begin{aligned} W_h &= \int_h^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x \\ &= kmM\int_h^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -kmM\left.\frac{1}{x}\right|_h^{+\infty} \\ &= \frac{kmM}{h}. \quad \square \end{aligned}$$

例 5 将一物体由地面垂直地向空中发射，问应提供多大的初始速度 v_0 才能使物体脱离地球的引力？

解 以地球的中心作为原点，垂直向上的方向作为正向，建立数轴. 设在时刻 t 物体位于 $x(t)$ 处. 这时，$v(t)=x'(t)$ 表示速度函数，它是时间 t 的递减函数，所以加速度 $v'(t)=x''(t)<0$. 根据 Newton 第二定律，可以写出微分方程

$$mx''(t) = -k\frac{mM}{x^2}.$$

消去 m 后，得出

$$x''(t) = -\frac{kM}{x^2}. \tag{5}$$

由于

$$x''(t) = v'(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

从而(5)可写成

$$v\mathrm{d}v = -\frac{kM}{x^2}\mathrm{d}x. \tag{6}$$

如果在有限的距离上 $v=0$，那么物体必须会回落到地面上. 要使该物体脱离地球的引力，必须而且只须当 $x=+\infty$ 时 $v_\infty=0$. 用 R 表示地球的半径，那么当 $x=R$ 时对应着 $v=v_0$. 对(6)式等号两边作积分，应用

$$\int_{v_0}^0 v\mathrm{d}v = -kM\int_R^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

由此得出

$$\frac{1}{2}v_0^2 = \frac{kM}{R}.$$

解出

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kM}{R}}.$$

由于重力加速度 $g=\frac{kM}{R^2}$，所以

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2\times 980\times 6\ 371\times 10^{-5}} = 11.17.$$

这就是说:每秒 11.17 千米的初始速度,可以刚好使物体脱离地球走上一条“不归之路”.这个速度叫做“第二宇宙速度”. □

第二类反常积分,乃是无界函数的“积分”,称为**瑕积分**.先看一个具体的例子.表达式

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$

在 Riemann 积分的意义之下,它是无意义的,因为被积函数无界:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty,$$

$x=0$ 称为积分的瑕点.但是,对一切 $\varepsilon\in(0,1)$,积分

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$

是有意义的,它是一个带有变动下限 ε 的积分.由于极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0+}2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1=2\lim_{\varepsilon\to 0+}(1-\sqrt{\varepsilon})=2$$

存在且有限,我们就定义

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2.$$

一般地说,设 f 在 $(a,b]$ 上有定义,且

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\infty,$$

但对任何 $\varepsilon\in(0,b-a)$ 函数 f 在 $[a+\varepsilon,b]$ 上可积,如果极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在并且有限,则称瑕积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{7}$$

收敛,并把上述极限定义为瑕积分的值:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x;$$

否则,称瑕积分(7)**发散**.

其中的点 a 称为**瑕点**.

当 b 是瑕点时,瑕积分(7)也可以类似地定义.如果 a 与 b 都是瑕点,那么任取一点 $c\in(a,b)$,我们定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x,$$

这时假定右边的两个瑕积分同时收敛.

同无穷积分一样,Newton - Leibniz 公式以及 Riemann 积分的运算法则和计算技巧也都适用于瑕积分.例如,若 F 是 f 在 $(a,b]$ 上的一个原函数,a 是瑕点,那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a+0).$$

例 6 设 $a>0$,则瑕积分

$$\int_\varepsilon^a \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$$

当 $p<1$ 时收敛,当 $p\geqslant 1$ 时发散.

证明 当 $p\neq 1$ 时,

$$\int_\varepsilon^a \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{1-p}(a^{1-p} - \varepsilon^{1-p}).$$

由于

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon^{1-p} = \begin{cases} 0, & \text{当 } p<1 \text{ 时;} \\ +\infty, & \text{当 } p>1 \text{ 时,} \end{cases}$$

可见,当 $p<1$ 时,

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{1-p};$$

当 $p>1$ 时这个瑕积分发散.因为

$$\int_\varepsilon^a \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln a - \ln \varepsilon \to +\infty\ (\varepsilon\to 0+),$$

所以,当 $p=1$ 时瑕积分发散. □

例 7 计算 $\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$.

解 因为 $\log x\to -\infty\ (x\to 0+)$,故 $x=0$ 是一个瑕点.用分部积分,

$$\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_{0+}^1 - \int_0^1 \mathrm{d}x = -1,$$

这里用到了

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0. \quad \square$$

例 8 计算

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

解 这里 a 与 b 都是瑕点.容易看出,这个瑕积分是收敛的.我们用换元法来计算它的值.当 $x\in(a,b)$ 时,下列两式

$$\frac{x-a}{b-a},\quad \frac{b-x}{b-a}$$

既是正数,并且和等于 1,因此可设

$$\frac{x-a}{b-a}=\sin^2\theta,\quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

此时,

$$x=a+(b-a)\sin^2\theta=a\cos^2\theta+b\sin^2\theta,$$
$$dx=2(b-a)\cos\theta\sin\theta d\theta.$$

于是,瑕积分化为常义下的积分

$$2\int_0^{\pi/2}d\theta=\pi.\quad\square$$

本节的目的只是为了满足物理课程中可能发生的需要,仅对反常积分作一些初步介绍.在本书的第11章中,将有非常详细的研究.

练习题 7.7

1. 计算下列反常积分:

(1) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}, p>1$; (2) $\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$;

(3) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$; (4) $\int_0^{+\infty}x^5e^{-x^2}dx$;

(5) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x)}$; (6) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$;

(7) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$; (8) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$;

(9) $\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx, n\in\mathbf{N}^*$;

(10) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}, n\in\mathbf{N}^*$;

(11) $\int_0^{+\infty}x^{2n+1}e^{-x^2}dx, n=0,1,2,\cdots$;

(12) $\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx\left(提示:令\ t=x-\frac{1}{x}\right)$.

2. 设函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续且 $f\geqslant 0$.如果 $\int_0^{+\infty}f(x)dx=0$,求证:$f=0$.

3. 计算下列瑕积分:

(1) $\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; (2) $\int_{-1}^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(3) $\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$; (4) $\int_{-1}^1\frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$;

(5) $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int_0^1 (\ln x)^n \mathrm{d}x, n\in\mathbf{N}^*$；

(7) $\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x, n\in\mathbf{N}^*$.

4. 计算下列两积分的比值：

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}},\quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}.$$

5. 求证：

$$\int_0^x \mathrm{e}^{xt-t^2}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{x^2/4}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/4}\mathrm{d}t.$$

6. $\varphi(x) = -\int_0^x \ln\cos t\,\mathrm{d}t, |x|\leqslant\frac{\pi}{2}$. 证明：

$$\varphi(x) = -x\ln 2 + 2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right),$$

并计算 $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$，再计算下列积分：

(1) $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^{\pi/2} x\cot x\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

7. 有一无限长的均匀细棒，密度为 ρ，在距棒为 a 处置一单位质量的质点，计算棒对质点的引力.

8. 有一直径为 1 m，高为 2 m 的直立圆柱桶盛满了水. 桶底有一个直径为 1 cm 的小孔. 水从小孔流出的速度为 $v=0.6\sqrt{2gh}$，h 是瞬时水深，g 为重力加速度. 问水全部流完需多少时间？

§7.8 面积原理

在本章开始的时候，我们就把积分解释为曲边梯形的面积，这样就把“数”与“形”结合了起来. 数与形的恰当的、巧妙的结合，往往给我们带来新的思想和新的发现. 在这一节中，通过几个例子来说明这一问题.

现在所说的“面积原理”，就是用积分来估计和式.

定理 7.19 若 $x\geqslant m\in\mathbf{N}^*$ 时，f 是一个非负的递增函数，则当 $\xi\geqslant m$ 时有

$$\left|\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k)-\int_m^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant f(\xi) \tag{1}$$

证明　命 $n=[\xi]$，则

$$\int_m^n f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=m+1}^{n}\int_{k-1}^{k} f(x)\mathrm{d}x.$$

由图7.4中的面积关系可见，

$$f(k-1)\leqslant\int_{k-1}^{k} f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k).$$

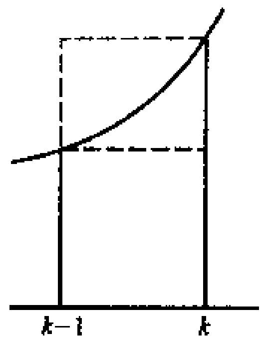

图7-4

对 k 从 $m+1$ 到 n 求和，得出

$$\begin{aligned}f(m)+f(m+1)+\cdots+f(n-1)&\leqslant\int_m^n f(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant f(m+1)+\cdots+f(n-1)+f(n).\end{aligned} \tag{2}$$

另一方面，我们有

$$0\leqslant\int_n^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(\xi)(\xi-n)\leqslant f(\xi). \tag{3}$$

从(2)和(3)可得

$$\begin{aligned}f(m)+f(m+1)+\cdots+f(n-1)&\leqslant\int_m^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant f(m+1)+\cdots+f(n)+f(\xi).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}-f(\xi)\leqslant -f(n)&\leqslant\int_m^{\xi} f(x)\mathrm{d}x-(f(m)+f(m+1)+\cdots+f(n))\\&\leqslant f(\xi)-f(m)\leqslant f(\xi).\end{aligned}$$

这表明

$$\left|\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k)-\int_m^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant f(\xi).\quad\square$$

例1　命 $\lambda>0$，$f(x)=x^{\lambda}$，则

解　$$\left|\sum_{a\leqslant n\leqslant[\xi]} n^{\lambda}-\frac{\xi^{\lambda+1}-a^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right|\leqslant\xi^{\lambda}.$$

由此推出

$$\sum_{a\leqslant n\leqslant[\xi]} n^{\lambda}=\frac{\xi^{\lambda+1}-a^{\lambda+1}}{\lambda+1}+O(\xi^{\lambda}).\quad\square$$

例2　命 $f(x)=\ln x$，$\xi\geqslant1$，以及

$$T(\xi)=\sum_{n\leqslant\xi}\ln n,$$

利用定理7.19，得到

$$\left|T(\xi)-\int_1^{\xi}\ln x\mathrm{d}x\right|\leqslant\ln\xi,$$

这正是

$$|T(\xi)-\xi\ln\xi+\xi-1|\leqslant\ln\xi.$$

特别地，当 ξ 是正整数 n 时，我们有

$$n\ln n-n+1-\ln n\leqslant\ln n!\leqslant n\ln n-n+1+\ln n.$$

取指数后，得到

$$n^{n-1}\mathrm{e}^{-n+1}\leqslant n!\leqslant n^{n+1}\mathrm{e}^{-n+1}.$$

这是关于无穷大量 $n!$ 的一个粗略的估计. 更精确的估计见§7.9. □

当函数 $f\geqslant0$ 且递减时，利用类似的方法，可得出更精密的结果.

定理 7.20 设 $x\geqslant m\in\mathbf{N}^*$ 时，f 是一个非负的递减函数，则极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=m}^{n}f(k)-\int_m^n f(x)\mathrm{d}x\right)=\alpha \tag{4}$$

存在，且 $0\leqslant\alpha\leqslant f(m)$，更进一步，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，那么

$$\left|\sum_{k=m}^{[\xi]}f(k)-\int_m^{\xi}f(x)\mathrm{d}x-\alpha\right|\leqslant f(\xi-1), \tag{5}$$

这里 $\xi\geqslant m+1$.

证明 命

$$g(\xi)=\sum_{k=m}^{[\xi]}f(k)-\int_m^{\xi}f(x)\mathrm{d}x.$$

我们有

$$\begin{aligned}g(n)-g(n+1)&=-f(n+1)+\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\\&\geqslant-f(n+1)+f(n+1)=0.\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}g(n)&=\sum_{k=m}^{n-1}\left(f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\right)+f(n)\\&\geqslant\sum_{k=m}^{n-1}(f(k)-f(k))+f(n)=f(n)\geqslant0.\end{aligned}$$

这说明 $\{g(n)\}$ 是一个非负递减的数列. 因此 $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}g(n)$ 存在. 由于 $0\leqslant g(n)\leqslant g(m)=f(m)$，可知 $0\leqslant\alpha\leqslant f(m)$.

如果进一步假定 $f(x)\to0(x\to+\infty)$，则

$$\begin{aligned}&g(\xi)-\alpha\\&=\sum_{k=m}^{[\xi]}f(k)-\int_m^{\xi}f(x)\mathrm{d}x-\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=m}^{n}f(k)-\int_m^n f(x)\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{k=m}^{[\xi]}f(k)-\int_m^{[\xi]}f(x)\mathrm{d}x-\int_{[\xi]}^{\xi}f(x)\mathrm{d}x\\
&\quad-\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=m}^{n}f(k)-\int_m^n f(x)\mathrm{d}x\right)\\
&=-\int_{[\xi]}^{\xi}f(x)\mathrm{d}x-\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=[\xi]+1}^{n}f(k)-\int_{[\xi]}^{n}f(x)\mathrm{d}x\right)\\
&=-\int_{[\xi]}^{\xi}f(x)\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=[\xi]+1}^{n}\int_{k-1}^{k}(f(x)-f(k))\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

现在,我们分别来求最后这个表达式的一个上界和一个下界,首先,

$$
\begin{aligned}
\text{上式}&\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=[\xi]+1}^{n}\int_{k-1}^{k}(f(k-1)-f(k))\mathrm{d}x\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=[\xi]+1}^{n}(f(k-1)-f(k))=f([\xi])\leqslant f(\xi-1).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

其次,

$$
\begin{aligned}
\text{该表达式}&\geqslant-\int_{[\xi]}^{\xi}f(x)\mathrm{d}x\geqslant-(\xi-[\xi])f([\xi])\\
&\geqslant-f([\xi])\geqslant-f(\xi-1).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

综合(6)、(7)即得(5). □

这个定理有许多应用.

例3 取 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $m=1$. 由定理7.20的(4),得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=\gamma,$$

这里的常数 γ 名叫 **Euler 常数**. 进一步,由(5)可以得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{8}$$ □

(8)是一个很有用的公式,在练习题1.7中已经提到过它. 下面是一公用公式(8)的例子.

例4 求级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{1}{k}$ 的和.

解 记它的部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{1}{k}$. 如果能算出 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S$, 那么,由于 $S_{2n+1}=S_{2n}+\dfrac{1}{2n+1}$, 所以 $\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S$, 因而级数的和就是 S. 现在

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}$$
$$=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

由于

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right),$$

代入上式并用公式(8)即得

$$\begin{aligned}S_{2n}&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\&=\ln 2n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)-\left(\ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=\ln 2+O\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

由此即得 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n}=\ln 2$，故所求级数的和为

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}=\ln 2.\quad\square$$

例 5 设当 $x\geqslant 1$ 时 $f\geqslant 0$ 且递减，则无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与无穷积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛，同时发散.

证明 这是公式(4)的直接推论. □

利用面积原理，还可以证明一些不等式.

例 6 设 $0<a<b$，求证

$$\frac{2}{a+b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).\tag{9}$$

证明 考察函数 $\frac{1}{x}$. 当 $x>0$ 时它是凸函数，连结两点 $\left(a,\frac{1}{a}\right)$ 与 $\left(b,\frac{1}{b}\right)$ 的弦必在相应的曲线段 $y=\frac{1}{x}(a\leqslant x\leqslant b)$ 的上方. 因此，图 7－5 中梯形的面积必大于曲边梯形的面积. 故有

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(b-a).$$

即

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

这正是(9)中右边的不等式

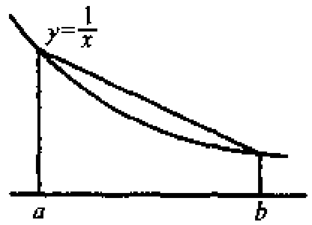

图 7-5

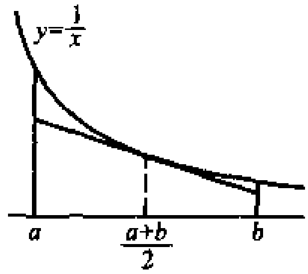

图 7-6

其次,过曲线上的点$\left(\frac{a+b}{2},\frac{2}{a+b}\right)$作曲线的切线(图 7-6),它与横轴、两平行直线 $x=a$, $x=b$ 所围成的梯形的面积正好等于长为$(b-a)$、宽为$\frac{2}{a+b}$的矩形的面积:$2\frac{b-a}{a+b}$.注意到图 7-6 中的面积大小,得知

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x}>2\frac{b-a}{b+a}.$$

这正是(9)中左边那个不等式:

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{2}{a+b}.$$

特别地,当 $a=n\in\mathbf{N}^*$, $b=n+1$ 时,(9)成为

$$\frac{1}{n+1/2}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right). \tag{10}$$

下一节里将用到这个不等式. □

例 7 设连续函数 φ 在$[0,+\infty)$上严格递增,并且 $\varphi(0)=0$,那么必存在连续的反函数 φ^{-1},它在$[0,+\infty)$上严格递增,并且 $\varphi^{-1}(0)=0$,对任何 $a>0$, $0<b<\varphi(+\infty)$,求证不等式

$$ab\leqslant\int_0^a \varphi(x)\mathrm{d}x+\int_0^b \varphi^{-1}(y)\mathrm{d}y. \tag{11}$$

式中等号当且只当 $b=\varphi(a)$(即 $a=\varphi^{-1}(b)$)时成立.

证明 无需任何文字说明,只需观察下列图形的面积关系就可以明白(11)的正确性(图 7-7).(11)式左边的 ab 应理解为一块矩形的面积. □

不等式(11)称为 **Young 不等式**.它有许许多多的用处.例如,讨论函数 $\varphi(x)=x^{p-1}(p>1)$,它有反函数 $\varphi^{-1}(y)=y^{q-1}$,其中 $q=p/(p-1)>1$.对函数 φ 与 φ^{-1}用 Young 不等式,可得

$$ab\leqslant\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\left(\text{其中}\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right),$$

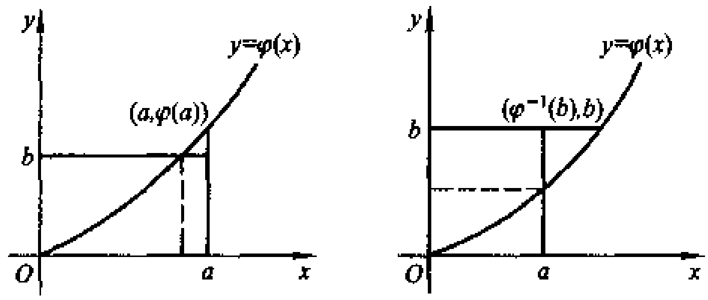

图 7-7

式中等号当且只当 $a^p=b^q$ 时成立.

置 $a=A^{1/p}$, $b=B^{1/q}$,我们得到

$$A^{1/p}B^{1/q}\leqslant\frac{1}{p}A+\frac{1}{q}B, \tag{12}$$

其中正数 p 与 q 适合 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 式(12)中的等号当且只当 $A=B$ 成立.

例 8 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是两组不全为零的非负实数,则有不等式

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\Big(\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^n b_i^q\Big)^{1/q}, \tag{13}$$

其中 $p,q>1$,且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. (13)中等号成立的充分必要条件是存在常数 λ,使得

$$a_i^p=\lambda b_i^q, i=1,\cdots,n.$$

证明 令

$$A_i=\frac{a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p}, B_i=\frac{b_i^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}$$

$i=1,2,\cdots,n$. 用不等式(12),得到

$$\frac{a_ib_i}{\Big(\sum\limits_{i=1}^n a_i^p\Big)^{1/p}\Big(\sum\limits_{i=1}^n b_i^q\Big)^{1/q}}\leqslant\frac{1}{p}\frac{a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p}+\frac{1}{q}\frac{b_i^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}, i=1,\cdots,n. \tag{14}$$

两边对 i 从 1 到 n 求和,移项后得到

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\Big(\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^n b_i^q\Big)^{1/q},$$

(3)式得证.

(13)中等号成立的充分必要条件是(14)中每一个不等式的等号成立,即

$$\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} = \frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}, i = 1, \cdots, n,$$

或者

$$\frac{a_i^p}{b_i^q} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}, i = 1, \cdots, n.$$

上式右端是一个与 i 无关的常数,记之为 λ,即得

$$a_i^p = \lambda b_i^q, i = 1, \cdots, n. \quad \square$$

不等式(13)称为 Hölder 不等式,是一个类似于"几何平均不超过算术平均"那样常用的不等式.当 $p = q = 2$ 时,Hölder 不等式变为

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2,$$

这叫做 Cauchy - Schwarz 不等式,这时等号成立的充分必要条件为 $a_i = \lambda b_i$, $i = 1, \cdots, n$.

练习题 7.8

1. 设 $a, b \geqslant 1$,试证:

$$ab \leqslant e^{a-1} + b\ln b.$$

试讨论不等式中等号成立的条件.

2. 对任意 $a > 0$,证明

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+a}\sqrt{\frac{a}{k}} < \pi.$$

(提示:证明不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+a)\sqrt{k}} < \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)\sqrt{x}}.)$$

3. 设 f, g 在 $[a, b]$ 上连续,$p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.证明 Hölder 不等式:

$$\int_a^b |fg| \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b |f|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q},$$

式中等号当且仅当 $|f|^p = B|g|^q$ 时成立,这里 B 为常数.

(提示:将

$$\frac{|f|}{\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}}, \quad \frac{|g|}{\left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}}$$

分别当作 Young 不等式推论中的 a 和 b.)

4. 设 f,g 在$[a,b]$上连续,$p\geqslant1$.证明 Minkowski 不等式

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_a^b |f|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\left(\int_a^b |g|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

(提示:先证

$$\int_a^b |f+q|^p\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b |f+g|^{p-1}|f|\mathrm{d}x+\int_a^b |f+g|^{p-1}|g|\mathrm{d}x,$$

再利用 Hölder 不等式.)

5. 设 $0<p<1$,证明

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}=\frac{n^{1-p}}{1-p}+\beta+O\left(\frac{1}{n^p}\right),$$

这里 β 是一个常数.

6. 设 ξ 为正整数,利用面积原理研究和式

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant\xi}\ln\ln n.$$

问题 7.8

1. (1) 设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant0$, $f(0)=0$, $f'(0)\geqslant0$,又设 f' 为递增的连续函数,则

$$f\left(\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}a_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}f(a_k).$$

(2) 求证:当 $r>1$ 时,成立不等式

$$\left(\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}a_k\right)^r\leqslant\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}a_k^r.$$

2. 计算:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-2\left[\frac{n}{k}\right]\right).$$

(本题是 1976 年美国 Putnam 数学竞赛题.)

3. 设$(-f)$是$[a,b]$上的凸函数,$f(a)=f(b)=0$,且 $f'(a)=\alpha>0$, $f'(b)=\beta<0$.求证:

$$0\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\alpha\beta\frac{(b-a)^2}{\beta-\alpha}.$$

§7.9 Wallis公式和Stirling公式

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时 $0<\sin x<1$，因此，对自然数 $n\in\mathbf{N}^*$，有

$$\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x$$

对 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 成立．从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 作积分，得到

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x<\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\mathrm{d}x<\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\mathrm{d}x.$$

利用§7.4的公式，得知

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

由此变形后得到

$$\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\frac{\pi}{2}<\frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)((2n-1)!!)^2}<\frac{\pi}{2}.$$

由夹逼定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)}\left(\frac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\right)^2=\frac{\pi}{2}.$$

这就是 Wallis 公式．经过开平方之后，Wallis 公式也可以写为

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}.\tag{1}$$

作为 Wallis 公式的一个应用，我们来证明下面的 Stirling 公式

$$n!\sim\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n,n\to\infty.$$

在推导 Stiring 公式之前，先说说为什么需要这样一个公式．大家知道，$n!=1\cdot2\cdot3\cdots\cdot n$，它的定义是很明确的．当 $n\to\infty$ 时，这是一个无穷大量，而且我们能感觉得到它趋向于无穷大的速度非常之快．很大的数的阶乘，按照它的定义，是一个很复杂的不便于估计数值的东西，不要说计算它的精确数值，就连它的无穷大的量级我们也不易直接得到．所以，无论对于理论或实际应用来说，当 n 很大时，求出 $n!$ 的一个既简单又便于估计的近似表达式，是一件很重要的事情．

讨论数列

$$a_n=\frac{n!\ e^n}{n^{n+1/2}}(n=1,2,\cdots),$$

由此算出

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}.$$

取对数,

$$\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1.$$

用 $n+\dfrac{1}{2}$ 去乘 §7.8 的不等式(10),得到

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right).$$

进而得到

$$0<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

所以

$$1<\frac{a_n}{a_{n+1}}<e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}.\tag{2}$$

现在我们用 $n+j(j=0,1,\cdots,k-1)$ 代替(2)中的 n,然后把这 k 个不等式都乘起来,得到

$$1<\frac{a_n}{a_{n+k}}<e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)}.\tag{3}$$

公式(2)左边那个不等式表明数列 $\{a_n\}$ 是严格递减的,所以应当收敛于某个数 α.现在,在(3)中令 $k\to\infty$,得到

$$1<\frac{a_n}{\alpha}\leqslant e^{\frac{1}{4n}}.\tag{4}$$

由此可知 $\alpha>0$.很明显,Wallis 公式(1)可以通过数列 $\{a_n\}$ 表示为

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_{2n}\sqrt{2}},$$

由此得出 $\alpha=\sqrt{2\pi}$,从而得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\ e^n}{n^{n+1/2}}=\sqrt{2\pi},$$

也就是

定理 7.21(Stirling 公式)

$$n!\sim\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n\ (n\to\infty).$$

上述公式还可以写成一个更精确的形式. 把 $a_n=\dfrac{n!\ e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ 和 $\alpha=\sqrt{2\pi}$ 代入不等式(4)得

$$1<\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}<e^{\frac{1}{4n}},$$

即

$$0<\ln\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}<\frac{1}{4n}.$$

记 $\theta_n=4n\ln\dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}$, 那么 $0<\theta_n<1$. 由此即得 Stirling 公式的另一形式:

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\,e^{\frac{\theta_n}{4n}},0<\theta_n<1.$$

我们来看一个例子,它说明 Stirling 公式的用处.

例 1　求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{n!}{n^n\sqrt{n}}.$$

解　由 Stirling 公式,只需计算

$$\sqrt{2\pi}\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^{-1}\right)^n.$$

取对数后,得

$$\begin{aligned}n\left(n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right)&=n\left(n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\cdots\right)-1\right)\\&=-\frac{1}{2}+o(1).\end{aligned}$$

因此,欲求的极限为 $\sqrt{\dfrac{2\pi}{e}}$. □

练习题 7.9

1. 估计当 $n\to\infty$ 时 $\dbinom{2n}{n}$ 的无穷大的阶.

2. 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}.$$

3. 求证：

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\binom{-1/2}{n}\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

4. 设 γ 为 Euler 常数，求证：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{1-1/k}}{(1+1/k)^k}=\frac{\sqrt{2\pi}}{\mathrm{e}^{1+\gamma}}.$$

5. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_nx_{n+1}=n,n\geqslant 1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x_{n+1}}=1$，证明：

$$\pi x_1^2=2.$$

提示：利用 Wallis 公式.

问题 7.9

1. 利用不等式

$$1-x^2\leqslant\mathrm{e}^{-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant 1),\mathrm{e}^{-x^2}\leqslant\frac{1}{1+x^2}(x\geqslant 0),$$

证明

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2. 对 $n\in\mathbf{N}^*$，令

$$S_n=1+\frac{n-1}{n+2}+\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-2}{n+3}+\cdots+\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-2}{n+3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2n},$$

求证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

§7.10 数值积分

设 f 在 $[a,b]$ 上可积，我们想算出 f 在 $[a,b]$ 上的积分. 如果 f 有一个比较简单的原函数，那就可以通过 Newton－Leibniz 公式来算出这个积分. 但是，如

果 f 的原函数不是初等函数，或者即使是初等函数但表示形式非常复杂，都不能利用 Newton - Leibniz 公式.何况，在许多实际的场合，函数 f 只是用它在有限个点上的值来表达的，这时当然无原函数可言.在所有这些情况下，我们只能用数值计算的办法，求出积分的近似值，这就是“数值积分”问题.

在这里，我们只打算介绍数值积分中的梯形法，用以说明数值积分的基本思想.

设想在一序列点 $x_0<x_1<\cdots<x_n(a=x_0,x_n=b)$ 上给定了对应的函数值 $y_i=f(x_i),i=0,1,2,\cdots,n$.这里的函数 f 应是一个可积函数.不止于此，在以下的讨论中，要用到多少阶导数，就设 f 有那样多阶的连续导数.

我们设 $[x_{i-1},x_i],i=1,2,\cdots,n$，是一个典型区间.这个区间与两点 $(x_{i-1},y_{i-1}),(x_i,y_i)$ 连成的直线段，以及平行直线 $x=x_{i-1},x=x_i$ 围成了一个梯形.我们就以它的面积

$$\frac{y_{i-1}+y_i}{2}(x_i-x_{i-1}),i=1,2,\cdots,n$$

作为积分 $\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\mathrm{d}x$ 的一个近似值.当 $h_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$ 都很小时，这个近似值可能是相当好的.把这 n 个小梯形的面积之和

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1}+y_i)(x_i-x_{i-1}) \tag{1}$$

就当成积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的一个近似值.如果点 x_i 是均匀分布的，那么 $h_i=\frac{b-a}{n},i=1,2,\cdots,n$，这时(1)便简化成

$$\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right). \tag{2}$$

梯形公式带来的误差如何估计？这就归结到“线性插值”带来的误差是如何估计的.在定理 4.4 中，我们已经做过这件事.

用 l_i 来记由两点 (x_{i-1},y_{i-1}) 与 (x_i,y_i) 所决定的线性函数，由定理 4.4 证明过程中的等式(10)，可得

$$l_i(x)-f(x)=\frac{(x_i-x)(x-x_{i-1})}{2}f''(\xi_i), \tag{3}$$

其中 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i],i=1,2,\cdots,n$.如果 M 是 $|f''|$ 在 $[a,b]$ 上的一个上界，那么在(3)双方作积分之后，将得出

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}l_i(x)\mathrm{d}x-\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{M}{2}(x_i-x)(x-x_{i-1})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{M}{2}(x_i-x_{i-1})^3\int_0^1 t(1-t)\mathrm{d}t=\frac{M}{12}(x_i-x_{i-1})^3.$$

在上述推导过程中，我们已作过换元

$$x=x_{i-1}+(x_i-x_{i-1})t,\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

如果分点是等距分布的，那么

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} l_i(x)\mathrm{d}x-\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M}{12}\frac{(b-a)^3}{n^3}.$$

因此，梯形公式所产生的误差将不超过

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{M}{12}\frac{(b-a)^3}{n^3}=\frac{M}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}.$$

将以上的结果写成一个定理.

定理 7.22 设 f 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，命

$$M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$$

以及

$$x_i=a+\frac{i}{n}(b-a),i=0,1,2,\cdots,n.$$

那么

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right)\frac{b-a}{n}\right|\leqslant\frac{(b-a)^3}{12n^2}M.$$

练习题 7.10

1. 用梯形法，计算下面两个积分的近似值：

1° $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$；

2° $\displaystyle\int_0^{100}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\mathrm{d}x$.

第8章 曲线的表示和逼近

到第7章为止,我们已经学习了单变量函数的微分和积分理论.这一章将主要研究这些理论在几何上的应用.具体地说,就是研究平面和空间中的曲线.当然,本章的研究既是基本的,又是初步的.更深入的讨论是另外一门课程"微分几何"的任务.

§8.1 参数曲线

粗略地说,曲线是点按照某一规律在空间中运动的轨迹.在蔚蓝的天空中一架喷气式飞机飞过,它的身后留下一条白烟雾,经久不散.如果忽略它的宽度,它就是一条曲线,代表着飞机飞行的轨迹.

在第2章中,我们把函数 f 的图象 $G(f)$ 说成是一段曲线.比较精确地说,$y=f(x)$是该曲线的表达式.这种表达式称为曲线的**显表达式**.它的好处是:要找出曲线上的点是比较容易的事:任给 $x_0\in[a,b]$,计算 $y_0=f(x_0)$,那么(x_0,y_0)就是曲线上的一个点.这种点找得越多,曲线的细节就表现得越充分.但是,曲线的显表达式也有其十分本质的缺点.第一,曲线能表达为显式的必要条件是:平行于纵轴的直线与曲线至多只能有一个交点.如果不是这样,在某些特定的情况下,可以通过旋转坐标轴使得这一要求得到满足;但是,对一条封闭的曲线,例如一个圆,那么不论如何安排坐标系,这一要求总无法被满足.第二,曲线作为点的运动轨迹,是一种客观存在,应是与坐标系的选取无关的几何对象.一旦它被显式 $y=f(x)$表达之后,实际上就意味着已经有一个坐标系存在.这时,很可能有一些几何上非本质的东西,被带了进来.为了把这个问题说得清楚一些,让我们看两个例子.从几何上看,平行于纵轴的直线同其他直线没有任何差别,但是在这个坐标系中,前者根本不能有显表达式;又如 $y=\sqrt{1-x^2}$代表中心在坐标原点、半径为1的圆在横轴上方的那一部分.由于 $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$,当 $x=\pm1$时 y'不存在,这时若按照切线方程

$$y=y_0+y'(x_0)(x-x_0),$$

我们根本无法写出这段圆弧在$(-1,0)$与$(1,0)$处的切线.但是,从几何上看,圆周上的每一点都处在完全平等的地位,不可能想像它在某些点有切线而在另外一些点没有切线!

比显表达式更灵活一些的是所谓**隐表达式**.那就是说,利用方程$F(x,y)=0$来表示曲线,这里F是两个变量x,y的函数.对这种函数的详细讨论,是本书下册的内容.例如说,以原点为中心、以a为半径的圆可以被完整地表示为

$$F(x,y)=x^2+y^2-a^2=0.$$

平面上任意一条直线都可表示为

$$F(x,y)=ax+by+c=0,$$

其中a,b,c是常数,且$a^2+b^2>0$.在$a=0$或$b=0$的时候,我们分别得到平行于横轴与纵轴的一条直线.

曲线的隐表示法也有一个缺点,即曲线上的点必须通过解方程才能得到.这就是说,对于给定的x_0,我们要求解含未知量y的方程$F(x_0,y)=0$.假如y_1,$y_2,y_3,\cdots$是这个方程的根,那么$(x_0,y_1),(x_0,y_2),(x_0,y_3),\cdots$就是曲线上的点.解方程通常是相当麻烦的事.

曲线的最直接和最灵活的描述法,是所谓的**参数表示**.我们不把直角坐标x或y中的一个看成是另一个的函数,而把两个坐标x和y都看成第三个变量t的函数,t就是所谓的**参数**.当t在一个合适的区间$[\alpha,\beta]$内变化时,坐标为x与y的点(x,y)就描绘出一条曲线

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\quad t\in[\alpha,\beta].$$

参数t有时有明显的几何的或物理的意义,有时几何或物理意义并不明显.例如说,圆有参数表示

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\end{cases}\quad t\in[0,2\pi].$$

这里,参数t表示圆上的点的中心角(图8-1),利用§6.4中的公式,也可以把这个圆表示为

$$\begin{cases}x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}a,\\ y=\dfrac{2t}{1+t^2}a,\end{cases}\tag{1}$$

这里$t\in(-\infty,+\infty)$.在这一表示法中,参数t的几何意义不明显.当t从$-\infty$开始逐渐变到$+\infty$时,点从$(-a,0)$的下方出发,沿着反

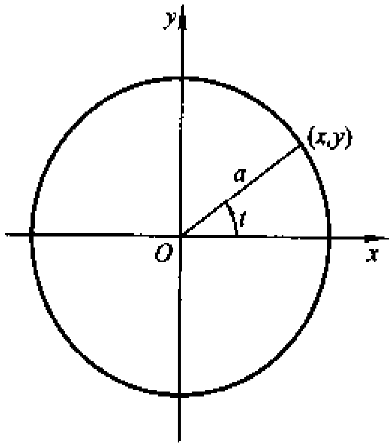

图8-1

时针方向描出这一圆周,但是点$(-a,0)$是唯一没有参数值与它对应的点.

由于我们有选择参数的权利,自然应当努力让所选的参数具有较明显的几何意义.

例 1　旋轮线

当一个圆沿着一条直线无滑动地滚动时,圆上一个固定点 P 所描绘出的路径(曲线)叫做**旋轮线**(也称为**摆线**). 不妨设半径为 a 的圆在横轴上滚动,在起始的时刻,那个固定点与坐标原点重合. 当圆从它的起始位置按顺时针方向转了一个角 t,由于圆沿着横轴作没有滑动的滚动,这时切点到原点的距离正好等于由切点到固定点 P 的弧长,而滚动圆的中心 M 必定在点(at,a)上,所以这时点 P 的坐标是(图 8-2)

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t). \end{cases} \tag{2}$$

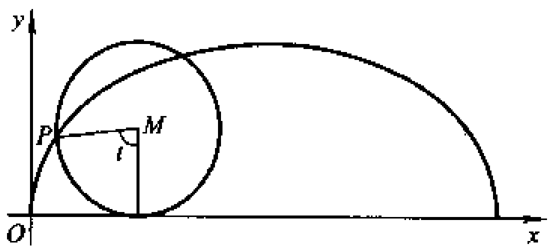

图 8-2

从(2)中虽然可以消去参数 t 而得到非参数形式的曲线方程(把 x 作为 y 的函数),然而却失去了表达的简洁性. □

现在我们来考察空间曲线.

例 2　讨论参数曲线

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, t\in(-\infty,+\infty). \\ z = bt, \end{cases} \tag{3}$$

这里,$a>0$,$b>0$ 为常数. 首先注意到:不论 t 为何值,总有

$$x^2+y^2=a^2.$$

这表明曲线总是缠绕在以 z 轴作为轴的一个正圆柱上. 当参数 t 由某个值 t_0 变到 $t_0+2\pi$ 时,x 与 y 的值没有改变但 z 得到了一个改变量 $2\pi b$. 曲线(3)称为**圆柱螺线**,$2\pi b$ 称为**螺距**. 它的图形如图 8-3 所示. □

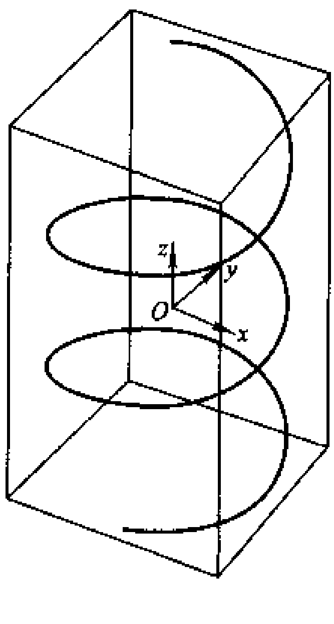

图 8-3

例 3　对显式的平面曲线

$$y=f(x),x\in[a,b]$$

总可以作显然的参数化,那就是

$$\begin{cases}x=t,\\ y=f(t),\end{cases}\quad t\in[a,b].\quad\square$$

讨论空间参数曲线

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t),\end{cases}\quad t\in[\alpha,\beta].\tag{4}$$

参数 $t=\alpha$ 所对应的点 $(x(\alpha),y(\alpha),z(\alpha))$ 称为曲线(4)的**起点**,而参数 $t=\beta$ 所对应的点 $(x(\beta),y(\beta),z(\beta))$ 称为曲线(4)的**终点**.当参数 t 从 α 逐渐增大到 β 时,曲线(4)由起点开始逐渐变到终点.我们说,参数增加的方向决定了曲线(4)的**定向**.

定义 8.1 如果 x,y,z 都是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数,那么曲线(4)称为**连续曲线**.

如果我们把(4)改写成向量形式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\tag{5}$$

这里 $t\in[\alpha,\beta]$,那么(5)就是一个单变量 t 的向量值函数.它表示的曲线与(4)表示的曲线是同样一条曲线.公式(5)称为该曲线的**向量方程**.向量方程有缩小书写的作用.很明显,(4)与(5)中,知道了其中的一个就能很容易地写出另外一个.函数 x,y,z 称为曲线 $\boldsymbol{r}$ 的**分量**.

如果 $t_1,t_2\in(\alpha,\beta)$,但 $t_1\neq t_2$,却使得

$$\boldsymbol{r}(t_1)=\boldsymbol{r}(t_2),$$

曲线(5)称为是**自交的曲线**,或者说曲线(5)有**重点**.当 $\boldsymbol{r}(\alpha)=\boldsymbol{r}(\beta)$ 时,称曲线(4)或(5)是**封闭曲线**.

练习题 8.1

1. 参数曲线

$$x=a\cos^3 t,\quad y=b\sin^3 t,\ 0\leqslant t<2\pi,\ a,b>0$$

称为**星形线**.作出星形线的图形.试消去参数 t 以得到它的隐式方程.

2. 隐式方程

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2),\ a>0$$

表示的曲线称为**双纽线**.令 $\frac{y}{x}=\tan\theta$,写出双纽线以 θ 为参数的参数方程,

并作出它的图形.

3. 曲线 $x^3+y^3=3axy(a>0)$ 称为 Descartes 叶形线. 令 $y=tx$,写出叶形线以 t 为参数的参数方程,再作出它的图形.

§8.2　曲线的切向量

从今以后,我们假设§8.1中的曲线(5)的三个分量有我们所需要的各阶导函数.

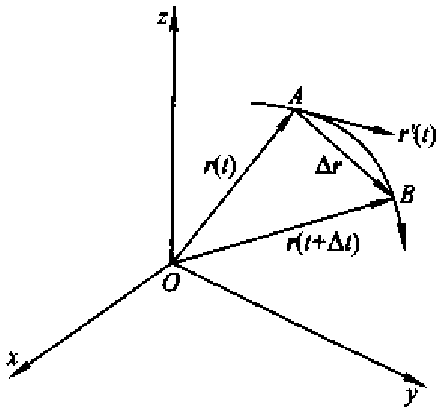

图 8-4

设 $\boldsymbol{r}(t)$ 是该曲线上的一点,其中 $t\in(\alpha,\beta)$. 给 t 的一个增量 Δt,考虑曲线上的另外一点 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$,见图 8-4. 如果记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$,令

$$\Delta \boldsymbol{r}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t),$$

这是一个起点在 $\boldsymbol{A}$、终点在 $\boldsymbol{B}$ 的向量. 向量 $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ 与 $\boldsymbol{AB}$ 有着同样的指向. 当点 $\boldsymbol{B}$ 沿着曲线向 $\boldsymbol{A}$ 无限靠近时,如果 $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ 有着确定的极限,那么这个极限就可以定义为曲线在点 $\boldsymbol{r}(t)$ 处的切向量. 也就是说,定义

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

为曲线的切向量,用 $\boldsymbol{r}'(t)$ 来表示.

因为

$$\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

$$=\frac{1}{\Delta t}(x(t+\Delta t)-x(t),y(t+\Delta t)-y(t),z(t+\Delta t)-z(t))$$

$$=\left(\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t},\frac{x(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t},\frac{x(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\right),$$

所以

$$\boldsymbol{r}'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t)),$$

这里 $t\in(\alpha,\beta)$. 至于端点处的切向量,可以定义

$$\boldsymbol{r}'(\alpha)=(x'_+(\alpha),y'_+(\alpha),z'_+(\alpha)),$$

$$\boldsymbol{r}'(\beta)=(x'_-(\beta),y'_-(\beta),z'_-(\beta)).$$

例 1 求圆 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\theta)=(a\cos\theta,a\sin\theta),\theta\in(0,2\pi)$的切向量.

解 切向量是 $\boldsymbol{r}'(\theta)=(-a\sin\theta,a\cos\theta)$. 也可以这样来看问题:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{r}(\theta)\cdot\boldsymbol{r}'(\theta)\\&=a^2(-\cos\theta\sin\theta+\cos\theta\sin\theta)\\&=0,\end{aligned}$$

这表明 $\boldsymbol{r}'(\theta)$与径向量 $\boldsymbol{r}(\theta)$正交. 所以,$\boldsymbol{r}'(\theta)$的确是圆的切向量(见图 8-5).

□

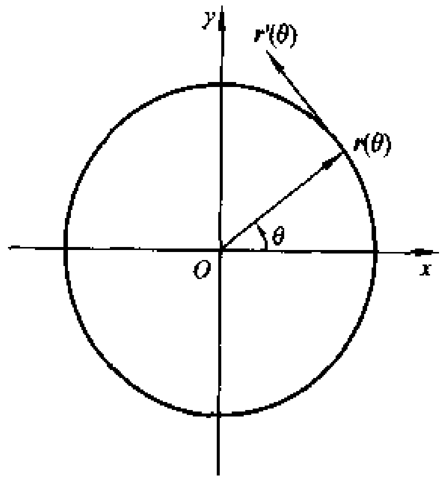

图 8-5

例 2 证明:§8.1 例 2 中的圆柱螺线在每一点的切向量与 z 轴夹成定角.

证明 圆柱螺线的向量方程是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt),\ t\in\mathbf{R},$$

因此

$$\boldsymbol{r}'(t)=(-a\sin t,a\cos t,b)$$

是圆柱螺线的切向量,从而单位切向量是

$$\frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}r'(t),$$

这里 $\|r'(t)\|$ 表示向量 $r'(t)$ 的长度. 而 z 轴正向上的单位向量是 $(0,0,1)$，这两个单位向量的内积等于它们之间夹角的余弦，即

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}r'(t)\cdot(0,0,1)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

这是一个常数，这就证得了我们的结论. □

得到了切向量，就可以很容易地写出曲线上点的切线方程. 设 $t_0\in(\alpha,\beta)$，那么曲线在点 $r(t_0)$ 处的切线方程是：

$$r=r(t_0)+\lambda r'(t_0),$$

这里 $\lambda\in(-\infty,+\infty)$ 是切线方程的参数. 如果消去参数，得到

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)},$$

这是切线方程的点向式.

定义 8.2　如果 $r'(t_0)\neq 0$，称 $r(t_0)$ 是曲线的一个**正则点**；如果 $r'(t_0)=0$，则称 $r(t_0)$ 是曲线的一个**奇点**. 如果曲线 $r=r(t)$ 全由正则点组成，则称这条曲线是一条**正则曲线**. 如果切向量 $r'(t)$ 的三个分量都是 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数，并且 $r(t)$ 是正则曲线，则称曲线 $r=r(t)$ 是**光滑曲线**.

例如，圆柱螺线是一条光滑曲线.

例 3　考察平面曲线

$$r(t)=(t^3,t^2),\ -\infty<t<+\infty.$$

这时，$r'(0)=(0,0)$. 所以曲线上的点 $(0,0)$ 是一个奇点，见图 8-6. 它不是一条光滑曲线，只是一条分段的光滑曲线. □

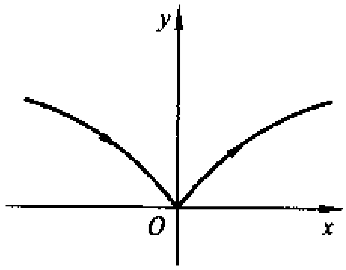

图 8-6

参数 t 可以经过某种变换，例如说通过函数 φ 将参数 t 变为新的参数 τ：$t=\varphi(\tau)$，那么曲线的向量方程 $r=r(t)$ 就变为 $r=r(\varphi(\tau))=r\circ\varphi(\tau)$，为了保证两个参数 t 与 τ 之间有着一一对应的关系，最方便的办法是设函数 φ 是连续可导的并且 $\varphi'(\tau)\neq 0$ 处处成立. 为了使曲线的定向不因为参数的改变而改变，则要求 $\varphi'(\tau)>0$ 处处成立. 在这些条件下，由复合函数求导的法则可知：

$$\frac{dr}{d\tau}=r'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau),$$

曲线的正则性并不因参数的改变而改变. 在这种许可的参数变换之下，曲线的光滑性也不因参数的改变而改变.

练习题 8.2

1. 讨论椭圆

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

(1) 求椭圆在每一点上的切向量；

(2) 证明椭圆的光学性质：从一焦点发出的光线，在经过椭圆镜面反射之后必经过另一焦点.

2. 求参数曲线 $\boldsymbol{r}(t) = (e^t, t, t^2)$在 $t=0$ 与 $t=1$ 这两点上的切线方程.

3. 设参数曲线

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1\right),$$

求证：对任何 $t \in \mathbf{R}$，径向量 $\boldsymbol{r}(t)$与切向量 $\boldsymbol{r}'(t)$互相正交. 问这是一条什么曲线？

4. 讨论平面曲线

$$\boldsymbol{r}(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t), \ t \in \mathbf{R},$$

求证：在曲线上的每一点处，切向量与径向量交成定角$\frac{\pi}{4}$.

5. 设参数曲线段

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)), \ a \leqslant t \leqslant b,$$

它的分量 x 和 y 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，并且对 $t \in (a,b)$，有 $x'(t) \neq 0$. 我们称由$(x(a), y(a))$与$(x(b), y(b))$两点决定的直线段为这条参数曲线段的弦. 求证：曲线上至少有一点使得曲线在这点上的切线与弦平行.

6. 设 $\boldsymbol{a}(t)$，$\boldsymbol{b}(t)$是两个可导的向量函数，$\lambda(t)$是可导的数量函数. 证明：

(1) $(\lambda(t)\boldsymbol{a}(t))' = \lambda'(t)\boldsymbol{a}(t) + \lambda(t)\boldsymbol{a}'(t)$；

(2) $(\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t))' = (\boldsymbol{a}'(t), \boldsymbol{b}(t)) + (\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}'(t))$；

(3) $(\boldsymbol{a}(t) \times \boldsymbol{b}(t))' = \boldsymbol{a}'(t) \times \boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{a}(t) \times \boldsymbol{b}'(t)$.

7. 设可导的向量函数 $\boldsymbol{a}(t)$有不变的长度，求证：$\boldsymbol{a}(t)$与 $\boldsymbol{a}'(t)$总是正交的.

8. 设 $\boldsymbol{a}_i(t)$，$i=1,2,3$，是三个可导的向量函数，并且对任何 t，它们两两正交且长度都等于 1，求证：

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}'_1(t) = \lambda_{11}\boldsymbol{a}_1(t) + \lambda_{12}\boldsymbol{a}_2(t) + \lambda_{13}\boldsymbol{a}_3(t), \\ \boldsymbol{a}'_2(t) = \lambda_{21}\boldsymbol{a}_1(t) + \lambda_{22}\boldsymbol{a}_2(t) + \lambda_{23}\boldsymbol{a}_3(t), \\ \boldsymbol{a}'_3(t) = \lambda_{31}\boldsymbol{a}_1(t) + \lambda_{32}\boldsymbol{a}_2(t) + \lambda_{33}\boldsymbol{a}_3(t), \end{cases}$$

其中右边的系数矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

是反对称方阵，即 $\lambda_{ij}=-\lambda_{ji}$，$i,j=1,2,3$.

§8.3　光滑曲线的弧长

设 Γ 是一条光滑曲线

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

点 $A=\boldsymbol{r}(\alpha)$ 与 $B=\boldsymbol{r}(\beta)$ 分别是 Γ 的起点和终点. 我们按照 Γ 的定向，在 Γ 上取 $n+1$ 个点：

$$A=A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n=B, \tag{1}$$

并把 n 条线段的长度之和 $\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{A_{i-1}A_i}$ 作为 Γ 的“弧长”的一个近似值. 如果设点 A_i 对应着参数值 t_i，$i=0,1,2,\cdots,n$，那么

$$\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=\beta. \tag{2}$$

这说明曲线 Γ 上的一个分割(1)，导致了参数区间 $[\alpha,\beta]$ 上的分割(2)；反之亦然. 这时，

$$\begin{aligned}\overline{A_{i-1}A_i}&=\|\boldsymbol{r}(t_i)-\boldsymbol{r}(t_{i-1})\|\\&=((x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2+(z(t_i)-z(t_{i-1}))^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

利用微分中值定理，我们有

$$\begin{aligned}x(t_i)-x(t_{i-1})&=x'(\xi_i)\Delta t_i,\\y(t_i)-y(t_{i-1})&=y'(\eta_i)\Delta t_i,\\z(t_i)-z(t_{i-1})&=z'(\zeta_i)\Delta t_i,\end{aligned}$$

其中 $\xi_i,\eta_i,\zeta_i\in(t_{i-1},t_i)$，$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$. 由此可知

$$\overline{A_{i-1}A_i}=\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\eta_i))^2+(z'(\zeta_i))^2}\,\Delta t_i,$$

这里 $i=1,2,\cdots,n$. 若把分割(2)记为 π，由于 x'，y' 与 z' 都是连续函数，所以存在一个常数 K，使

$$\overline{A_{i-1}A_i}\leqslant K\Delta t_i\leqslant K\|\pi\|.$$

由此可得

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\overline{A_{i-1}A_i}\}\leqslant K\|\pi\|.$$

这表明，将参数区间$[\alpha,\beta]$无限加细，将导致分割(1)把曲线Γ无限加细.

我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{A_{i-1}A_i}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\eta_i))^2+(z'(\zeta_i))^2}\Delta t_i,\tag{3}$$

当我们把区间$[\alpha,\beta]$上的分割(2)无限加细时，如果(3)的极限存在，那么取这个极限作为Γ的弧长的定义是十分合理的.

我们来看看当$\|\pi\|\to0$时，(3)式的右边是否有极限？式(3)的右边很像是函数

$$\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}$$

的积分和，但事实上并不真正是一个 Riemann 和，这是因为ξ_i,η_i与ζ_i虽然同在区间(t_{i-1},t_i)内，但未必彼此相等.

但是，我们有

定理 8.1 设$x(t),y(t),z(t)$在$[\alpha,\beta]$上有连续的导函数，那么我们仍有

$$\begin{aligned}&\lim_{\|\pi\|\to0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\eta_i))^2+(z'(\zeta_i))^2}\Delta t_i\\&=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{4}$$

证明 对任何两个三维向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，有三角形不等式

$$|\|\boldsymbol{a}\|-\|\boldsymbol{b}\||\leqslant\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$$

(这个不等式说的是：三角形任意一边的长决不小于其他两边长之差). 由此得到

$$\begin{aligned}&\Big|\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\xi_i))^2+(z'(\xi_i))^2}-\\&\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\eta_i))^2+(z'(\zeta_i))^2}\Big|\\&\leqslant\sqrt{(y'(\xi_i)-y'(\eta_i))^2+(z'(\xi_i)-z'(\zeta_i))^2}\\&\leqslant|y'(\xi_i)-y'(\eta_i)|+|z'(\xi_i)-z'(\zeta_i)|.\end{aligned}$$

由于$y'(t)$与$z'(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续，从而一致连续，因此对任意给定的$\varepsilon>0$，存在着$\delta_1>0$，凡是$\|\pi\|<\delta_1$时，便有

$$\left.\begin{aligned}&|y'(\xi_i)-y'(\eta_i)|<\frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)},\\&|z'(\xi_i)-z'(\zeta_i)|<\frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

对$i=1,2,\cdots,n$都成立. 用I来记(4)式右边的积分值. 因此，对上述的$\varepsilon>0$，存在着$\delta_2>0$，凡是$\|\pi\|<\delta_2$时，便有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\xi_i))^2+(z'(\xi_i))^2}\Delta t_i-I\right|<\frac{\varepsilon}{2},\tag{6}$$

不论其中值点 $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$, $i=1,2,\cdots,n$, 如何选取. 故当 $\|\pi\|<\min(\delta_1,\delta_2)$ 时,便有

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\eta_i))^2+(z'(\zeta_i))^2}\Delta t_i-I\right|\\ \leqslant&\left|I-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\xi_i))^2+(z'(\xi_i))^2}\Delta t_i\right|\\ &+\sum_{i=1}^{n}\left|\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\xi_i))^2+(z'(\xi_i))^2}\right.\\ &\left.-\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\eta_i))^2+(z'(\zeta_i))^2}\right|\Delta t_i\\ <&\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=1}^{n}|y'(\xi_i)-y'(\eta_i)|\Delta t_i+\sum_{i=1}^{n}|z'(\xi_i)-z'(\zeta_i)|\Delta t_i\\ <&\frac{\varepsilon}{2}+\left(\frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}+\frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}\right)\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i=\varepsilon,\end{aligned}$$

不管 $\xi_i,\eta_i,\zeta_i\in[t_{i-1},t_i]$如何选取, 这里 $i=1,2,\cdots,n$. 在以上的推导中,我们先后利用了(6)式与(5)式. 定理 8.1 得证. □

这就是说,对于光滑曲线 $\Gamma:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, 可以定义 Γ 的弧长为

$$s(\Gamma)=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,\mathrm{d}t.\tag{7}$$

或者用向量的记号,

$$s(\Gamma)=\int_\alpha^\beta\|\boldsymbol{r}'(t)\|\,\mathrm{d}t.\tag{8}$$

例 1　求半径为 a 的圆的周长.

解　由 §8.2 的例 1 知,所求周长为

$$\int_0^{2\pi}\|\boldsymbol{r}'(t)\|\,\mathrm{d}t=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi a.\quad\square$$

例 2　求旋轮线的一拱的弧长.

解　由 §8.2 的例 1,我们有

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),$$

其中 $t\in[0,2\pi]$. 由于

$$x'(t)=a(1-\cos t),\quad y'(t)=a\sin t.$$

因此,旋轮线的一拱的弧长是

$$\begin{aligned}&a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t\\ &=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=4a\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=8a.\quad\square\end{aligned}$$

如果平面曲线 Γ 是由显式 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$所给出的,根据 §8.1 例 3

中指明的参数化,可以求得 Γ 的弧长

$$s(\Gamma)=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x, \tag{9}$$

这里假设函数 f 在区间$[a,b]$上连续可导.

例 3 利用显方程 $y=\sqrt{a^2-x^2}$,$|x|\leqslant a$,求半圆的弧长.

解 由于 $x^2+y^2=a^2$,把 y 看成 x 的函数,在等式两边求导,得 $x+yy'=0$.因此 $y'=-\dfrac{x}{y}$.按公式(9),所求的弧长等于

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a \sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\,\mathrm{d}x &=2\int_0^a \sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}\,\mathrm{d}x=2a\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{y}\\ &=2a\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}.\end{aligned}$$

这是一个广义积分,作换元 $x=a\sin t$ 之后,最后那个表达式变为

$$2a\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t=\pi a.$$

因此整个圆周长是 $2\pi a$. □

观察弧长公式(8).初看上去,曲线的弧长似乎同参数的选择(也就是参数方程的选择)有关系,其实不然.

设想经过变换 $t=\varphi(\tau)$,参数 t 换成了参数 τ,在区间$[\varepsilon,\delta]$上导函数 φ'连续且取正值,又 $\alpha=\varphi(\varepsilon)$,$\beta=\varphi(\delta)$.曲线的参数方程由 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$变成了 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\circ\varphi(\tau)$.由积分换元法则得到

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \|\boldsymbol{r}'(t)\|\,\mathrm{d}t &=\int_\varepsilon^\delta \|\boldsymbol{r}'(\varphi(\tau))\|\varphi'(\tau)\mathrm{d}\tau\\ &=\int_\varepsilon^\delta \|\boldsymbol{r}'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau=\int_\varepsilon^\delta \left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau}\right\|\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

由此可见,曲线的弧长只依赖于曲线的自身,与参数的选择没有关系.

考察参数 t 的函数

$$s(t)=\int_\alpha^t \|\boldsymbol{r}'(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau,\ t\in[\alpha,\beta].$$

它表示的是从曲线的起点 $\boldsymbol{r}(\alpha)$沿着该曲线算到曲线上任一点$\boldsymbol{r}(t)$这一段弧长.它是一个带变动上限的积分.将它对 t 求导,得到

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=s'(t)=\|\boldsymbol{r}'(t)\|>0,\ t\in[\alpha,\beta]. \tag{10}$$

这表明函数 $s(t)$是 t 的严格递增的函数,因此可以将 t 作为s 的函数反解出来,得到 $t=t(s)$,这也是一个严格递增的函数.这就是说,对于一段光滑曲线,总可以将它自身的弧长作为向量方程的参数.以弧长作为参数有很多的便利,例如

说，许多公式都将大大地简化，并且比较容易地导出曲线的其他几何不变量.

现在，我们把向量参数方程直接写为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，这里的参数 s 是从某一点算起的弧长.这时，由于(10)，我们得到：

$$\|\boldsymbol{r}'(s)\|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}=1. \tag{11}$$

这表明：将径向量对弧长参数求取的导向量，是模长为 1 的向量.也就是说，$\boldsymbol{r}'(s)$ 是曲线 Γ 上各点处的单位切向量.反之，当切向量为单位向量时，即 $\|\boldsymbol{r}'(t)\|=1$ 时，由弧长公式可得

$$s=\int_{\alpha}^{t}\|\boldsymbol{r}'(\tau)\|\mathrm{d}\tau=\int_{\alpha}^{t}\mathrm{d}\tau=t-\alpha.$$

即 $t=s+\alpha$.由此看出，t 就是从 $t=\alpha$ 处算起的弧长.

例 4　考虑参数方程

$$x=a\cos\frac{t}{a},\qquad y=a\sin\frac{t}{a}.$$

这方程代表的仍是中心在原点、半径为 a 的圆.由于此时

$$\boldsymbol{r}'(t)=\left(-\sin\frac{t}{a},\cos\frac{t}{a}\right),$$

从而 $\|\boldsymbol{r}'(t)\|=1$，所以 t 是该圆周的弧长.事实上，如果用 θ 表示径向量从横轴的正向开始、朝反时针方向转动时扫过的角度，那么 $a\theta$ 就是弧长.

顺便指出，由公式(11)可得

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2, \tag{12}$$

这叫做**弧元微分**的公式；对于平面曲线，公式(12)退化成

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2. \tag{13}$$

练习题 8.3

1. 计算下列曲线的弧长：

(1) $x=\mathrm{e}^t\cos t,y=\mathrm{e}^t\sin t,0\leqslant t\leqslant 2\pi$；

(2) $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t),\end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi$，其中常数 $a>0$；

(3) $\begin{cases}x=\dfrac{c^2}{a}\cos^3 t,\\ y=\dfrac{c^2}{b}\sin^3 t,\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$，

其中常数 $a>b>0$ 且 $c^2=a^2-b^2$；

(4) $x=\sin t, y=t, z=1-\cos t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

(5) $x=t, y=3t^2, z=6t^3, 0\leqslant t\leqslant 2$;

(6) $y^2=2px, p>0, 0\leqslant x\leqslant a$;

(7) $y=\ln\cos x, x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$;

(8) $y=\sqrt{25-x^2}, x\in\left[0,\frac{5\sqrt{2}}{2}\right]$.

2. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续可导. 将图像 $G(f)$ 绕着横轴旋转,生成一张旋转曲面,求证这张旋转面的侧面积为

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

3. 设 $y=\sin x, x\in[0,\pi]$. 求将这条曲线段绕着 x 轴旋转所作成的旋转面的侧面积.

4. 求证:半径为 a 的球的表面积为 $4\pi a^2$.

5. 求抛物线 $y^2=x, 0\leqslant x\leqslant 1$,绕 x 轴旋转所生成的旋转面的侧面积.

§8.4 曲　率

在讨论曲线的曲率前,先证明下面的

定理 8.2 设曲线 $\Gamma: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$($s$ 是弧长参数)的每一点有一个单位向量 $\boldsymbol{a}(s)$, $\boldsymbol{a}(s+\Delta s)$ 和 $\boldsymbol{a}(s)$ 之间的夹角记为 $\Delta\theta$,那么

$$\|\boldsymbol{a}'(s)\|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|.$$

证明

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}'(s)\| &= \left\|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(s+\Delta s)-\boldsymbol{a}(s)}{\Delta s}\right\| \\ &= \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\|\boldsymbol{a}(s+\Delta s)-\boldsymbol{a}(s)\|}{|\Delta s|} \\ &= \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left(\left|\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\right|\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|\right) \\ &= \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|,\end{aligned}$$

定理证毕. □

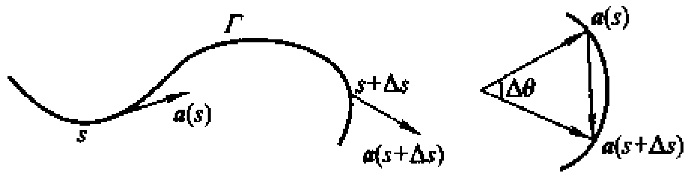

图 8-7

在这个定理中，与曲线上的点相联系的向量 $\boldsymbol{a}(s)$必须是单位向量，但不必是在该点处的切向量.当 $\boldsymbol{a}(s)$是各点处的单位切向量时，由定理 8.2 将产生一个十分重要的几何不变量，这就是下面要详细地讨论的曲率.

讨论曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，这里的参数 s 是曲线自身的弧长，因此$\boldsymbol{r}'(s)$是曲线的单位切向量，我们用 $\boldsymbol{T}(s)=\boldsymbol{r}'(s)$来表示这个向量.曲线上相邻两点 $\boldsymbol{r}(s)$与 $\boldsymbol{r}(s+\Delta s)$的切向量 $\boldsymbol{T}(s)$与 $\boldsymbol{T}(s+\Delta s)$之间的夹角 $\Delta\theta$ 与 Δs 之比当 $\Delta s\to 0$ 时的极限，度量了曲线的弯曲程度.由定理 8.2 可知，这一变化率正好是

$$\|\boldsymbol{T}'(s)\|=\|\boldsymbol{r}''(s)\|,$$

我们称之为曲线 $\boldsymbol{r}(s)$的**曲率**，用 $k(s)$来表示.也就是说

$$k(s)=\|\boldsymbol{r}''(s)\|.$$

粗略地说：曲线在一点的曲率等于切线方向对于弧长的转动率.转动越快，曲率越大.由于角与弧长是几何不变量，由此推知，曲率也是几何不变量.

例 1 直线可以用向量方程表示为

$$\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{u}s+\boldsymbol{v},$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 为常向量，并且 $\|\boldsymbol{u}\|=1$.这时切向量 $\boldsymbol{T}(s)=\boldsymbol{r}'(s)=\boldsymbol{u}$ 是常向量，从而 $\boldsymbol{r}''(s)=0$，曲率 $k(s)=0$.反之，如果 $k=0$，即 $\boldsymbol{r}''(s)=0$，由此可知 $\boldsymbol{r}'(s)$是常向量，进而解得 $\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{u}s+\boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 为常向量.

由此可知：直线的特征是 $k=0$. □

例 2 讨论圆 $\boldsymbol{r}(s)=\left(a\cos\dfrac{s}{a},a\sin\dfrac{s}{a}\right)$.

这时，

$$\boldsymbol{r}'(s)=\left(-\sin\frac{s}{a},\cos\frac{s}{a}\right),$$

$$\boldsymbol{r}''(s)=\left(-\frac{1}{a}\cos\frac{s}{a},-\frac{1}{a}\sin\frac{s}{a}\right).$$

于是，$k(s)=\|\boldsymbol{r}''(s)\|=\dfrac{1}{a}$，即圆的曲率等于其半径的倒数. □

现在设曲线由参数方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$给出，这里参数 t 不必是弧长.在这种情况下，曲率如何计算？由于

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{r}'(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s},$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\boldsymbol{r}''(t)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\boldsymbol{r}'(t)\frac{d^2t}{ds^2},$$

将以上两式的双方作向量外积，得

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''(t)\left(\frac{dt}{ds}\right)^3.$$

由于$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$是单位向量，因此$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$与$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$互相正交，所以有

$$\begin{aligned}k(t)=\left\|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right\|&=\left\|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right\|\\&=\|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''(t)\|\left|\frac{dt}{ds}\right|^3.\end{aligned}$$

但因 $\|d\boldsymbol{r}\|=\|ds\|$，所以

$$\left|\frac{dt}{ds}\right|^3=\left\|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right\|^{-3}=\|\boldsymbol{r}'(t)\|^{-3}.$$

出此得出曲率公式

$$k(t)=\frac{\|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)\|}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|^3}.\tag{1}$$

例 3　求圆柱螺线

$$\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt),\ a>0$$

的曲率.

解　直接计算，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'(t)&=(-a\sin t,a\cos t,b),\\\boldsymbol{r}''(t)&=(-a\cos t,-a\sin t,0),\\\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''&=(ab\sin t,-ab\cos t,a^2).\end{aligned}$$

所以

$$\|\boldsymbol{r}'\|=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''\|=a\sqrt{a^2+b^2}.$$

代入公式(1)，得出曲率

$$k=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

它是一个常数，这与几何直觉是相符合的. □

参数曲线的最基本的知识就介绍到这里. 下面讲述的是广泛用于 CAGD 的 Bezier 曲线.

练习题 8.4

1. 求下列曲线的曲率:

(1) $\boldsymbol{r}(t)=(a\mathrm{ch}\,t, a\mathrm{sh}\,t, at)$,常数 $a>0$;

(2) $\boldsymbol{r}(t)=(a(3t-t^3), 3at^2, a(3t+t^3))$,常数 $a>0$.

2. 由下述方程确定一条球面曲线:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ x^2-y^2=3. \end{cases}$$

给定曲线上的一点 $P_0=(2,1,2)$,求曲线在 P_0 处的曲率.

3. 证明:若曲线的所有切线经过同一个点,则该曲线是一条直线.

§8.5 Bézier 曲线

设 $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是空间中任意给定的 $n+1$ 个向量.也可以说成给定 $n+1$ 个点,这些点是指把向量 $\boldsymbol{a}_i$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$的起点放在同一点上,它们的终点所指示的点.在这一种解释之下,今后在某些场合,向量和点这两个词就不加区别.

讨论下列空间参数曲线

$$\boldsymbol{P}(t)=\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\boldsymbol{a}_i,\ 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{1}$$

其中 $B_i^n(t)$ $(i=0,1,\cdots,n)$是第 5 章中已经研究过的 n 次 Bernstein 基函数,参数 t 的变化范围是区间$[0,1]$.我们称曲线(1)为 n 次 Bézier **曲线**,点 $\boldsymbol{a}_i$ $(i=0,1,\cdots,n)$叫做曲线(1)的**控制点**.

把 $\boldsymbol{a}_{i-1}$与 $\boldsymbol{a}_i$ 这两点用直线段相连,$i=1,2,\cdots,n$,我们得到一个“多边形”,一般地说,这个多边形不是封闭的,称这个多边形为曲线(1)的**控制多边形**.给定一条控制多边形,就惟一地对应着一条 Bézier 曲线.图 8-8 与图 8-9 画出了两条 Bézier 曲线以及相应的控制多边形.一眼看去,便意识到控制多边形勾画出它们所决定的 Bézier 曲线的轮廓.

当 $n=1$ 时,这时只有两个控制点 $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1$.所谓控制多边形,就是这两点连成的直线段.对应的一次 Bézier 曲线是

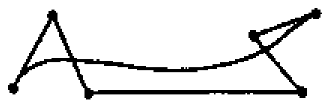

图 8-8

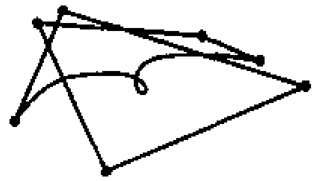

图 8-9

$$P(t)=(1-t)a_0+ta_1,\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$

它是以 a_0 为起点、以 a_1 为终点的直线段.

将本节的公式(1)与 § 5.2 的(1)相对照,就立刻发现,所谓 Bézier 曲线不过是以向量为系数的 Bernstein 表示,因此,第 5 章建立的许多等式,可以不加改动地移到 Bézier 曲线上来.例如说,

$$P(0)=a_0,\quad P(1)=a_n, \tag{2}$$

$$P'(t)=n\sum_{i=0}^{n-1}B_i^{n-1}(t)\Delta a_i,$$

$$P''(t)=n(n-1)\sum_{i=0}^{n-2}B_i^{n-2}(t)\Delta^2 a_i,$$

以及

$$P'(0)=n(a_1-a_0),\quad P'(1)=n(a_n-a_{n-1}), \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}P''(0)&=n(n-1)(a_2-2a_1+a_0),\\P''(1)&=n(n-1)(a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}),\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

等等.

为了阐述 Bézier 曲线的一般性质,我们要引进凸集的概念.平面上或空间中的一个点集称为**凸集**,是指如果任何两个点属于这个点集,那么由这两点所决定的直线段上的所有点也属于这个点集.例如,平面上的正方形、圆盘都是凸集.在空间中,球和椭球都是凸集.很容易举出不是凸集的例子:两个不同的点所组成的集合不是凸集;除去球心的一个球不是凸集;图 8-10 那个由封闭曲线围成的平面图形不是凸集,因为虽然点 A 与 B 都在这图形中,但线段 AB 上有不在这图形中的点.

设 K 是平面上或空间中的一个点集,那么包含 K 的最小凸集称为点集 K 的**凸包**.如果 K 只由一个点组成,那么 K 是凸集,因此 K 的凸包也就是 K.

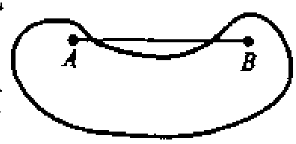

图 8-10

如果 K 由两个不同的点 A_0 与 A_1 所组成,那么 K 的凸包就是由线段 A_0A_1 上的所有的点组成的点集.如果 $K=\{A_0,A_1,A_2\}$,那么 K 的凸包就是以 A_0,A_1,A_2

为顶点的三角形上所有的点组成的点集.平面上的有限点集 K 的凸包,可以用下列十分直观的方法得到:在每一个点上打一根垂直于该平面的桩子,然后用一根橡皮圈将这些桩子都套在其中,那么,收紧后的橡皮圈所包围的区域内的所有点就是 K 的凸包.

设 $\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_n$ 是 $n+1$ 个向量,而 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是非负数并且适合 $\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$,这时 $\sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_i\boldsymbol{A}_i$ 就称为点 $\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_n$ 的一个**凸线性组合**.设 $K=\{\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_n\}$,不难证明 K 的凸包就是

$$\left\{\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\boldsymbol{A}_i;\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n\geqslant 0\ 且\ \sum_{i=0}^{n}\lambda_i=1\right\}.$$

即 K 的凸包是 K 的点的一切凸线性组合所成的点集.

现在,我们可以把 Bézier 曲线的基本性质写在下列定理之中.

定理 8.3　设 $\boldsymbol{P}(t)$ 是由本节公式(1)表示的 Bézier 曲线,那么

1° $\boldsymbol{P}(0)=\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{P}(1)=\boldsymbol{a}_n$.

这就是说 Bézier 曲线的起点和终点分别同它的控制多边形的起点和终点重合.这可以说成,Bézier 曲线在两个端点上插值于它的控制多边形;

2° $\boldsymbol{P}'(0)=n(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_0)$, $\boldsymbol{P}'(1)=n(\boldsymbol{a}_n-\boldsymbol{a}_{n-1})$.

这就是说 Bézier 曲线在起点和终点上分别同它的控制多边形的第一条边和最后一条边相切;

3° Bézier 曲线完全包含在它的控制点所组成的点集的凸包之中.这是因为,当 $t\in[0,1]$ 时,$B_i^n(t)\geqslant 0$, $i=0,1,\cdots,n$,且 $\sum\limits_{i=0}^{n}B_i^n(t)=1$,所以对每一个 $t\in[0,1]$,由(1)的右边表示的 Bézier 曲线上的点 $\boldsymbol{P}(t)$ 是控制点 $\{\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n\}$ 的一个凸线性组合.

性质 3°称为 Bézier 曲线的**凸包性质**.

控制点集的凸包,成了 Bézier 曲线存在区域的一个限定.虽然这种限定有时是十分宽松的,但凸包性质的实际意义还是值得重视的.在 CAGD 中,求两条 Bézier 曲线的交点是一个很实用的重要问题,这时我们可以分别求出它们的控制点集的凸包(这往往比计算曲线本身容易得多),再求出它们的公共部分,那么曲线的交点必然在这个交集之内.特别地,若这两个凸包根本不相交,我们可以肯定这两条 Bézier 曲线没有交点.

现在,我们来看看二次 Bézier 曲线.这时,有三个控制点 $\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$,对应的 Bézier 曲线是

$$\boldsymbol{P}(t)=(1-t)^2\boldsymbol{a}_0+2t(1-t)\boldsymbol{a}_1+t^2\boldsymbol{a}_2,\ t\in[0,1].$$

由凸包性质,可知这条二次 Bézier 曲线必然被包含在以这三个控制点作为顶点

的三角形的内部，因此必然是一条平面曲线(图 8－11).

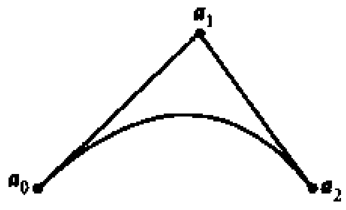

图 8－11

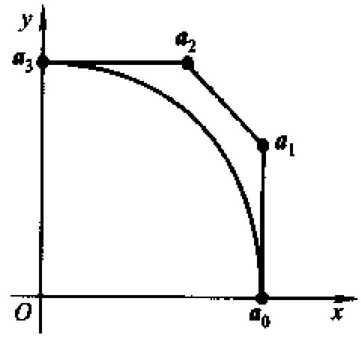

图 8－12

但是，三次 Bézier 曲线就没有这么简单，即使是平面三次 Bézier 曲线，也都十分灵活，千姿百态.

作为一个例子，让我们来看看如何用三次 Bézier 曲线来逼近单位圆周在第一象限的那一部分，见图 8－12. 在图中，我们只画出了这一段圆弧以及由四个顶点生成的控制多边形. 根据定理 8.3 中的性质 1°与 2°，我们令

$$\boldsymbol{a}_0=(1,0),\boldsymbol{a}_1=(1,\lambda),\boldsymbol{a}_2=(\lambda,1),\boldsymbol{a}_3=(0,1),$$

其中参数 $\lambda>0$，它的几何意义是控制多边形的第一条边和第三条边的长度；由于圆的几何对称性，我们有理由把这两条边的长度取得一样. 三次 Bézier 曲线是

$$\boldsymbol{P}(t)=\sum_{i=0}^{3}B_i^3(t)\boldsymbol{a}_i,$$

如果令 $\boldsymbol{P}(t)=(x(t),y(t))$，于是有

$$\left.\begin{aligned}x(t)&=B_0^3(t)+B_1^3(t)+\lambda B_2^3(t),\\ y(t)&=\lambda B_1^3(t)+B_2^3(t)+B_3^3(t).\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

通过选取正数 λ 的值，可以改变曲线的形状. 直观上看，如果选择 λ 以使得 Bézier 曲线当 $t=0.5$ 时与这段圆弧的中点重合，可望得到较好的逼近效果. 因此，令 $x\left(\frac{1}{2}\right)=y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，由此解得 $\lambda=\lambda_0$，其中

$$\lambda_0=\frac{4(\sqrt{2}-1)}{3}=0.552\,284\,75.$$

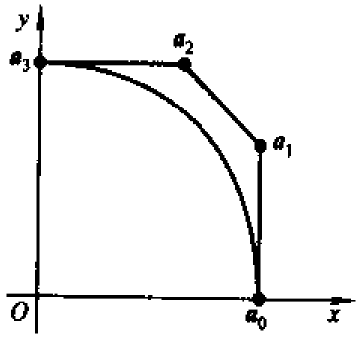

图 8－13

现在，在图 8－13 上画上单位圆，对应于 λ_0 的控制多边形和 Bézier 曲线，圆弧和曲线几乎合为一体，其差别我们用肉眼已无法分辨. 下面我们从理论上来分析一下当 $\lambda=\lambda_0$ 时的逼近误差. 很明显，取

$$\varepsilon(t)=x^2(t)+y^2(t)-1$$

作为一种偏差的度量是合理的. 注意到

$$x(0)=y(1)=1,$$
$$x(1)=y(0)=0,$$
$$x'(0)=y'(1)=0,$$
$$x\left(\frac{1}{2}\right)=y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$x'\left(\frac{1}{2}\right)+y'\left(\frac{1}{2}\right)=0,$$

可见

$$\varepsilon(0)=\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)=\varepsilon(1)=0.$$

这表明 $0,\frac{1}{2}$ 与 1 是 $\varepsilon(t)$ 的三个零点. 又由于

$$\varepsilon'(t)=2(x(t)x'(t)+y(t)y'(t)),$$

又可见

$$\varepsilon'(0)=\varepsilon'\left(\frac{1}{2}\right)=\varepsilon'(1)=0.$$

这表明 $0,\frac{1}{2}$ 与 1 都是 $\varepsilon(t)$ 的二重零点. 由于 ε 是 t 的 6 次多项式,我们有下列分解式

$$\varepsilon(t)=At^2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2(t-1)^2, \tag{6}$$

其中 A 是 $\varepsilon(t)$ 的 6 次方项的系数,即

$$A=2(3\lambda_0-2)^2=8(3-2\sqrt{2})^2\approx 0.235\,5.$$

我们看出,$\varepsilon\geqslant 0$,即逼近曲线上每一点到圆心的距离总不会小于圆的半径.

现在来求 $\varepsilon(t)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值. 由于当我们用 $(1-t)$ 代替(6)式右边的 t 时,仍得出同样的表达式,这说明,只需求出 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上 ε 的最大值就行了. 令 $t=\frac{1}{2}-u$,这时 u 也在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 中变化,我们有

$$t^2(1-t)^2\left(\frac{1}{2}-t\right)^2=\left(\frac{1}{2}-u\right)^2\left(\frac{1}{2}+u\right)^2u^2=\left(\frac{1}{4}-u^2\right)^2u^2,$$

这时 $0\leqslant u^2\leqslant\frac{1}{4}$. 利用几何平均－算术平均不等式,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{4}-u^2\right)^2u^2&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-u^2\right)\left(\frac{1}{4}-u^2\right)2u^2\\&\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-u^2+\frac{1}{4}-u^2+2u^2\right)\right)^3\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{432}.$$

可见 $\varepsilon(t)$在$[0,1]$上的最大值是

$$\frac{A}{432}\approx 0.000\,545.$$

这种逼近的效果已是相当优越了.利用更深刻一些的逼近论知识,可以证明,取 $\lambda=\lambda_0$ 所造成的逼近,是最佳的"一致逼近".

现在,增大 $\lambda(>\lambda_0)$的数值,来看看逼近曲线的变化.可以想像,随着 λ 的增加,逼近效果会越来越差.我们着重观察逼近曲线在几何形状上的变化,看看在什么情况之下,逼近曲线上会有拐点.对于参数曲线 $x=x(t),y=y(t)$而言,由于$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}$.因而为求出拐点,先要解方程

$$x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)=0, \tag{7}$$

由于

$$\begin{aligned}
x'(t)&=3((\lambda-1)B_1^2(t)-\lambda B_2^2(t)),\\
x''(t)&=6((\lambda-1)B_0^1(t)+(1-2\lambda)B_1^1(t)),\\
y'(t)&=3(\lambda B_0^2(t)+(1-\lambda)B_1^2(t)),\\
y''(t)&=6((1-2\lambda)B_0^1(t)+(\lambda-1)B_1^1(t)),
\end{aligned}$$

代入(7)后,经过耐心的计算,得到 t 的二次方程

$$t^2-t+\frac{\lambda-1}{3\lambda-2}=0. \tag{8}$$

方程(8)的两个根是

$$t_1,t_2=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{\frac{2-\lambda}{3\lambda-2}}\right). \tag{9}$$

为了让 t_1,t_2 都落在$(0,1)$之内,必须且只须

$$0\leqslant\frac{2-\lambda}{3\lambda-2}\leqslant 1.$$

解这个不等式,得 $\lambda\in(1,2]$.由(9)可见,只有当 $\lambda\in(1,2)$时,$t_1\neq t_2$,曲线才有 2 个拐点;当 $\lambda=2$ 时,$t_1=t_2=\frac{1}{2}$,两个重合的拐点变成尖点.在图 8-14 与图 8-15中分别画出了 $\lambda=\frac{4}{3}$ 与 $\lambda=2$ 的情形,可以作为上述理论的印证.

当 $\lambda>2$ 时,逼近曲线上再也没有拐点,但会出现重点,即曲线自己与自己相交.图 8-16 中画出了对应的 Bézier 曲线.

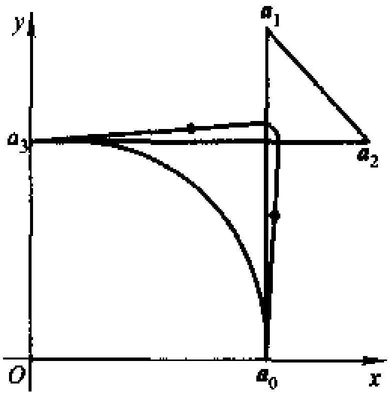

图 8－14

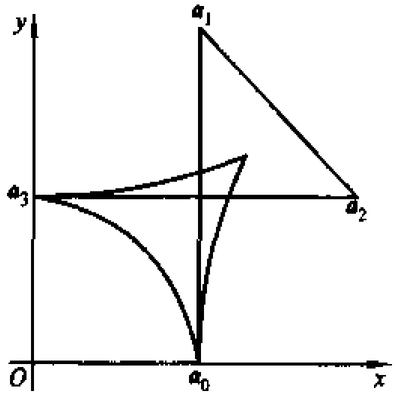

图 8－15

以上所有的 Bézier 曲线都以直线 $y=x$ 为对称轴. 这是必然的现象，因为控制多边形就有这种对称性. 这里变动的只是一个参数 λ，但是曲线的形状变化已经具有各种神态.

以上讨论的是用平面三次 Bézier 曲线来逼近业已存在的曲线(这里是四分之一的圆弧)的简单例子，但其方法有着一般的意义. 从以上的几个图形中，可以看到控制多边形是怎样影响着曲线的形状的，大家一定会对“控制多边形勾画出了它的 Bézier 曲线的形状”这一陈述有更深的了解. 如果读者能在计算机上进行对话式的作图，那么控制多边形对曲线的影响将变成实时的、动态的，因此非常生动.

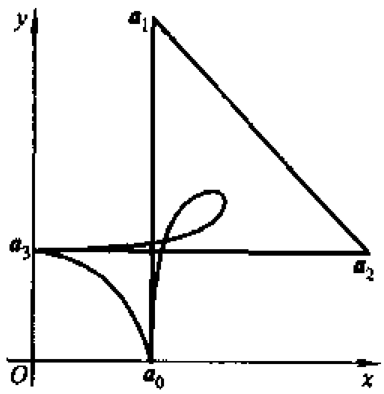

图 8－16

练习题 8.5

1. 对三次 Bézier 曲线

$$\boldsymbol{P}(t)=\sum_{i=0}^{3}\boldsymbol{a}_iB_i^3(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$

求证：

$$\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{P}(0),\quad \boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{P}(1),$$

$$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{P}(0)+\frac{1}{3}\boldsymbol{P}'(0),\quad \boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{P}(1)-\frac{1}{3}\boldsymbol{P}'(1).$$

2. 证明：三次多项式参数曲线 $\boldsymbol{P}(t)$ 总可以表为 Hermite 形式

$$\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{P}(0)F_0(t)+\boldsymbol{P}(1)F_1(t)+\boldsymbol{P}'(0)G_0(t)+\boldsymbol{P}'(1)G_1(t),$$

这里 $0\leqslant t\leqslant 1$.

3. 如果所有的控制点在一条直线上,求证它们所决定的 Bézier 曲线是一条直线.

4. 考虑三次 Bézier 曲线 $\boldsymbol{P}(t)$. 求证:参数 t 绝不是该曲线自身的弧长,除非它退化为一条直线.

第9章 数项级数

前面我们接触到的函数主要是**初等函数**,有相当多的自然现象和工程技术中的问题需要用这些函数来描述.但是,随着科学技术的发展,人们对自然界的认识逐步深化,发现有许多自然现象不能用初等函数来描述,特别有很多**微分方程**的解不能用初等函数来表达,这就要求人们去构造一些新的函数.§4.3 的例 2 曾经得到 e^x 的一个表达式:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},$$

其中 $0<\theta<1$, $-\infty<x<+\infty$.对于确定的 x,显然有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}=0,$$

因而有

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

这样,我们就把 e^x 表示为无穷多个幂函数

$$1, x, \frac{x^2}{2!}, \cdots, \frac{x^n}{n!}, \cdots$$

的和.换句话说,上面无穷多个幂函数的迭加产生了指数函数 e^x.这启发我们,把无穷多个函数

$$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$$

迭加起来,可能产生新的函数.

19 世纪上半叶,数学家普遍认为,连续函数除了一些特殊的点外都是可微的,他们不能想像有处处连续处处不可微的函数存在.1875 年 Weierstrass 首先构造出具有上述性质的函数,使大家对连续和可微的概念在认识上进了一步.Weierstrass 构造的这个函数正是用无穷级数来表达的.我们在§10.8 将要给出处处连续处处不可微的函数的例子,不过那个例子不是 Weierstrass 构造的,而是由 Van der Waerden 在 1930 年构造的,在想法上要更直观一些.

由此可见,无穷级数是构造新函数的一个十分有用的工具.当然,随之而来会有很多新问题:无穷多个函数如何求和? 如何研究和函数的性质? 要弄清这些问题,首先要知道无穷多个实数如何相加.

§9.1 无穷级数的基本性质

在§1.13中,作为数列极限的应用之一,我们提到过无穷多个数相加的问题,但在那里并没对它作系统的讨论.在这里,无穷多个数的和这一概念是我们讨论的出发点.

定义 9.1 无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

的前 n 项的和

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n$$

称为这个级数的第 n 个**部分和**.如果这些部分和构成的数列$\{S_n\}$有有限的极限 S,就说级数(1)是**收敛的**,其和为 S,记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S;$$

如果数列$\{S_n\}$没有有限的极限,就说级数(1)是**发散的**.

在§1.13中,我们已经知道**等比级数**

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots \tag{2}$$

当$|q|<1$时是收敛的,它的和是$\frac{1}{1-q}$.而当 $q=1$ 时,它的部分和 $S_n = n \to +\infty$,所以级数(2)发散.当 $q=-1$ 时,它的部分和

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数时;} \\ 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数时,} \end{cases}$$

$\{S_n\}$没有极限,故级数(2)也发散.当$|q|>1$时,

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$$

也没有有限的极限.综上所述,等比级数(2)只有当$|q|<1$时才是收敛的.

在§1.13中,我们还知道级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

当 $\alpha>1$ 时收敛;当 $\alpha\leqslant 1$ 时发散.这一重要事实在下面的讨论中经常要用到.

下面来看一个计算无穷级数和的例子.

例 1 设 $p\geqslant 0, q>0, s=p+q$,计算级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(sn-p)(sn+q)}$$

的和.

解　按定义

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(sn-p)(sn+q)}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{sn-p}-\frac{1}{sn+q}\right)\\
&=\frac{1}{s}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{sn-p}-\frac{1}{sn+q}\right)\\
&=\frac{1}{s}\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{sn-p}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{s(n+1)-p}\right)\\
&=\frac{1}{s}\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{sn-p}-\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{sn-p}\right)\\
&=\frac{1}{s}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{s-p}-\frac{1}{s(N+1)-p}\right)=\frac{1}{s(s-p)}.\quad\square
\end{aligned}$$

研究无穷级数,一个最基本的问题是判断它的敛散性,只有在级数收敛的情况下,讨论它的求和问题才是有意义的.下面给出一个级数收敛的必要条件.

定理 9.1　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,那么 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

证明很简单.用 S_n 记级数的第 n 个部分和,S 记它的和,那么

$$a_n=S_n-S_{n-1}\to S-S=0,n\to\infty.\quad\square$$

这个简单的事实可以用来判断一些级数的发散性.

例 2　级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 是发散的.这是因为

$$a_n=(-1)^n\not\to 0,n\to\infty.\quad\square$$

例 3　级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$ 发散.这是因为

$$a_n=n\sin\frac{1}{n}\to 1\neq 0,n\to\infty.\quad\square$$

必须注意,$a_n\to 0$ 仅仅是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的必要条件,并不充分,也就是说,从 $a_n\to 0$ 不能得出 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的结论.调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 便是一个例子.

无穷级数的和既然是有限和的极限,在运算上当然有与通常有限和相类似的性质.这里我们首先指出的是线性性质.

定理 9.2 如果级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 都收敛，那么级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)$$

也收敛，且

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)=\alpha\sum_{k=1}^{\infty} a_k+\beta\sum_{k=1}^{\infty} b_k, \tag{3}$$

这里 α,β 是任意两个实数.

证明 因为

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k+\beta b_k)=\alpha\sum_{k=1}^{n} a_k+\beta\sum_{k=1}^{n} b_k$$

对任意正整数 n 成立，命 $n\to\infty$ 即得(3). □

利用收敛级数的这个性质，可以计算稍微复杂一些的级数的和.

例 4 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+2^n}{3^{n+2}}$ 的和.

解 已知等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{3}{4},\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}=3.$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^n}{3^{n+2}}=\frac{1}{9}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}\right\}$$
$$=\frac{5}{12}. \quad □$$

与有限和类似的另一性质是收敛级数的可结合性.

定理 9.3 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 是一收敛级数，如果把级数的项任意归组而不改变其先后的次序，得新级数

$$(a_1+\cdots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+\cdots+a_{k_2})+\cdots$$
$$+(a_{k_{n-1}+1}+\cdots+a_{k_n})+\cdots, \tag{4}$$

这里正整数 $k_j, j=1,2,\cdots$，满足 $k_1<k_2<\cdots$，那么新级数也收敛，且与原级数有相同的和.

证明 设原级数的部分和数列为

$$S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots, \tag{5}$$

它有极限 S. 新级数(4)的部分和数列显然是

$$S_{k_1},S_{k_2},\cdots,S_{k_n},\cdots,$$

它是(5)的一个子数列，因而与(5)有相同的极限 S. □

必须注意,这个命题的逆命题是不成立的.即若(4)收敛,不能断言原级数一定收敛.级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n=1-1+1-1+\cdots$$

便是一个例子:如果把它的项两两结合起来,便得一个收敛级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots=0,$$

但它本身是发散的.

但若对(4)加上一些条件,定理 9.3 的逆命题也能成立.

定理 9.4 如果(4)的在同一括号中的项都有相同的符号,那么从(4)的收敛,便能推出原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,而且二者有相同的和.

证明 记(4)的部分和为

$$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots,$$

由假定 $\lim_{n\to\infty} A_n = S$. 由于(4)的括号中的项都同号,故当 k 由 $k_{n-1}+1$ 变到 k_n 时,相应的原级数的部分和 S_k 将单调地在 A_{n-1} 和 A_n 之间变动,即

$$A_{n-1}\leqslant S_k\leqslant A_n \text{ 或 } A_n\leqslant S_k\leqslant A_{n-1}, k_{n-1}<k\leqslant k_n.$$

命 $k\to\infty$,这时 $n\to\infty$,而 $\lim_{n\to\infty} A_n=\lim_{n\to\infty} A_{n-1}=S$,所以

$$\lim_{k\to\infty} S_k=S. \quad \square$$

这个定理在证明定理 9.24 时将要用到.

一个自然的问题是:如果任意改变收敛级数中项的次序,所得的新级数是否还收敛?一般来说,结论是否定的.我们将在 §9.5 中详细讨论这个问题.

定理 9.5 在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 前面去掉有限项或加上有限项,不影响级数的敛散性.

证明 从上述级数去掉前 m 项得级数

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k=a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots.$$

记

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k, \quad S'_{n-m}=\sum_{k=m+1}^{n} a_k,$$

那么

$$S_n-S'_{n-m}=a_1+\cdots+a_m$$

是一个与 n 无关的常数,故数列 $\{S_n\}$ 与 $\{S'_{n-m}\}$ 有相同的敛散性,因而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 与 $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ 有相同的敛散性.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 加上有限项后所得的级数，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也就是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 去掉有限项所得的级数，根据上面的证明，二者有相同的敛散性. □

作为本节的结尾，我们指出，无穷级数的敛散是通过它的部分和数列的敛散来定义的；反过来，任给一个数列 $\{S_n\}$，总可以构造一个级数，使其部分和数列就是 $\{S_n\}$. 事实上，只要命

$$a_1 = S_1, a_2 = S_2 - S_1, \cdots, a_n = S_n - S_{n-1}, \cdots,$$

就有

$$a_1 + \cdots + a_n = S_n,$$

即 $\{S_n\}$ 是级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列. 因此判断数列的敛散也可化为级数的敛散问题来考虑，在有些情况下，化为级数来考虑还更方便些.

练习题 9.1

1. 下面 5 个级数中，哪些收敛？哪些发散？

$$\sum_{n=1}^{\infty} n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}.$$

2. 求下列级数的和：

(1) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$;

(2) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots$;

(3) $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots$;

(4) $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \cdots$;

(5) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} + \cdots$.

3. 证明下列等式：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 - \sqrt{2}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)} = \ln 2$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$,其中 m 为正整数.

4. 作一个无穷级数,使其部分和 $S_n = \frac{1}{n}, n=1,2,\cdots$.

5. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是发散级数,对下列级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n),\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n),\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

的敛散性能得出什么结论?

6. 证明下列级数发散:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{3n^2-2}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

7. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,证明 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 也收敛. 试举例说明,逆命题不成立. 但若 $a_n > 0$,则逆命题也成立,试证之.

8. 设数列 $\{na_n\}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 都收敛,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

问题 9.1

1. 求证:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(pn+q)(pn+q+pr)} = \frac{1}{pr}\left(\frac{1}{q+p}+\frac{1}{q+2p}+\cdots+\frac{1}{q+rp}\right),$$

这里 r 是正整数, $pn+q \neq 0, n=1,2,\cdots$.

2. 求证:

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty} \frac{1}{m^2-n^2} = -\frac{3}{4m^2},$$

这里 m 是给定的正整数.

3. 求证:

$$11 < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10^6} < 19.$$

4. 设 $a_n > 0$, $\{a_n - a_{n+1}\}$ 为一个严格递减的数列. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 试证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=+\infty.$$

5. 证明存在正常数 K,使得不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$$

对于任何正数列 $\{a_n\}$ 成立.

§9.2 正项级数的比较判别法

从这一节开始,我们要较为系统地讨论判断级数敛散的方法.先讨论正项级数,它与一般级数的敛散问题有密切关系.

如果对 $n=1,2,\cdots$,都有 $a_n\geqslant 0$,就称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为**正项级数**.例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$ 都是正项级数.由于有了定理 9.5,只有有限个负项的级数也可以当成正项级数看待.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一个正项级数,它的部分和数列 $\{S_n\}$ 显然是一个递增数列,据此立刻可得

定理 9.6 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

证明 必要性是显然的.现假定 $\{S_n\}$ 有界,因为 $\{S_n\}$ 是递增数列,故有极限,因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. □

由于正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是递增数列,当其有界时,则有有限的极限;当其无界时,则必趋于 $+\infty$.因此正项级数只有两种可能:或者收敛于有限数,这时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$;或者发散于 $+\infty$,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$.

定理 9.6 是判断正项级数敛散的最基本的方法,几乎所有其他的判别法都由它导出.

§1.6 的例 2 和例 3 就是用这个方法判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}<+\infty$ $(\alpha>1)$,不过那里用的是数列的语言.

例 1 设 $a_n>0, S_n=a_1+\cdots+a_n$，证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}<+\infty.$$

证明 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$是正项级数，根据定理 9.6，只需证明它的部分和有界．事实上，对于任意正整数 N，

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N}\frac{a_n}{S_n^2}&=\sum_{n=2}^{N}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^2}\leqslant\sum_{n=2}^{N}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_{n-1}S_n}\\&=\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_N}<\frac{1}{a_1},\end{aligned}$$

即其部分和有界，因而级数收敛． □

一般地，可以证明，对任意 $\alpha>1$，都有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}<+\infty.$$

当然证明要比这儿困难(参见问题 9.2 的第 3 题)．

定理 9.6 固然简单，但直接证明某些级数的部分和有界往往不是很容易的．根据定理 9.6 得到的比较判别法提供了一个判别级数敛散的简单方法：只需用一个已知敛散的级数和要判别的级数作比较便能得出结论．

定理 9.7(比较判别法) 设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$，如果从第 N 项开始有不等式

$$a_n\leqslant b_n,$$

那么

1° 若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛；

2° 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 也发散．

证明 由于抹去级数的有限项不影响其敛散性，故不妨假定不等式 $a_n\leqslant b_n$ 对所有 $n=1,2,\cdots$都成立．分别用 A_n, B_n 记 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ 的部分和，则显然有

$$A_n\leqslant B_n,\ n=1,2,\cdots.$$

1° 若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n<+\infty$，则$\{B_n\}$有界，因而$\{A_n\}$也有界，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$；

2° 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$，则由上面的不等式知 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=+\infty$． □

例 2 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ 收敛.这是因为

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}<\frac{1}{n^{3/2}},n=1,2\cdots,$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}<+\infty$,故由定理 9.7 知原级数收敛. □

例 3 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\ln n)^{-\ln n}$ 收敛.因为当 n 充分大时有不等式

$$(\ln n)^{\ln n}=e^{\ln n\ln\ln n}=n^{\ln\ln n}>n^2,$$

即当 $n>e^9$ 时有

$$(\ln n)^{-\ln n}<\frac{1}{n^2},$$

故原级数收敛. □

应用比较判别法,就是运用不等式,而不等式是可以通过极限方法来建立的.下面的判别法比比较判别法用起来方便.

定理 9.8(比较判别法的极限形式) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是两个正项级数.如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l,$$

那么

1° 若 $0<l<+\infty$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 同敛散;

2° 若 $l=0$,则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛;

3° 若 $l=+\infty$,则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散.

证明 1° 设 $0<l<+\infty$,则对 $\varepsilon=\frac{l}{2}>0$,存在 N,当 $n>N$ 时,有 $\left|\frac{a_n}{b_n}-l\right|<\frac{l}{2}$,即

$$\frac{1}{2}lb_n<a_n<\frac{3}{2}lb_n.$$

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,则从上面右端的不等式得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散,则从上面左端的不等式得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散.因而二者同敛散.

2° 若 $l=0$,则对 $\varepsilon=1$,可得 N,当 $n>N$ 时,$0<\frac{a_n}{b_n}<1$,即 $a_n<b_n$.故当 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

同理可证 3°成立. □

例 4　级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3+2n-1}}$发散.这是因为

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^3+2n-1}}\sim\frac{1}{\sqrt{n}},n\to\infty.$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散便知上面的级数发散. □

例 5　研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$的敛散性.

解　因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{x^2}{2},$$

所以不论 x 取什么值,级数都收敛. □

最后让我们回忆§7.8中用面积原理建立的一个事实(§7.8例4):

定理 9.9(Cauchy 积分判别法)　设当 $x\geqslant1$ 时,$f(x)\geqslant0$ 且递减,那么无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$与无穷积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同时敛散.

这个判别法对某些级数特别有效.

例 6　级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$当$\alpha>1$ 时收敛,$\alpha\leqslant1$ 时发散.

证明　函数 $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$满足定理9.9的条件,因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 与无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$同时敛散.而后者当 $\alpha>1$ 时收敛,$\alpha\leqslant1$ 时发散. □

例 7　讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$的敛散性.

解　根据积分判别法,上述级数与积分

$$\int_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^\alpha}$$

同敛散.容易看出,这个广义积分当 $\alpha>1$ 时收敛,$\alpha\leqslant1$ 时发散.因而上述级数也是这样. □

练习题 9.2

1. 设 $a_n \leqslant b_n, n=1,2,\cdots$，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，能否断言 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛？试举例说明之.

2. 用比较判别法讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+5}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{3n^2+1}\right)^n$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$；　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$；

(7) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$；　　(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)$.

3. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛. 但反之不然，举例说明之.

4. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛，试证：

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)^2$$

也收敛.

5. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 也收敛. 举例说明逆命题不成立. 但若 $\{a_n\}$ 是递减数列，则逆命题也成立.

6. 证明级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ 发散.

7. 证明级数 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$ 发散.

8. 问 p, q 取何值时，级数

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$$

收敛.

9. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个收敛的正项级数，证明对任何 $\delta>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1+\delta}{2}}\sqrt{a_n} <$

$+\infty$. $\delta=0$ 时情况如何?

10. 设 $\sigma>0, a_n>0, n=1,2,\cdots$. 试证:

(1) 如果当 $n>N$ 时有 $\left(\ln\frac{1}{a_n}\right)(\ln n)^{-1}\geqslant 1+\sigma$, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 如果当 $n>N$ 时有 $\left(\ln\frac{1}{a_n}\right)(\ln n)^{-1}\leqslant 1$, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

(3) 利用上面的结果, 证明

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$$

收敛.

11. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个发散的正项级数, 试证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$ 收敛.

问题 9.2

1. 试证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$ 当 $0<x<\mathrm{e}^{-1}$ 时收敛, 当 $x\geqslant \mathrm{e}^{-1}$ 时发散.

2. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个发散的正项级数. 问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$ 的敛散情况如何?

3. 设 $a_n>0, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. 证明:

(1) 当 $\alpha>1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛;

(2) 当 $\alpha\leqslant 1$ 且 $S_n\to+\infty$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散.

4. 设 $\{a_n\}$ 是递减的正数列, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 同敛散. 利用这一结果证明:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$ 当 $\alpha>0$ 时收敛. $\alpha\leqslant 0$ 时发散;

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散.

5. 证明从调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 中划去所有分母中含有数字 9 的那些项

$\left(\text{例如}\frac{1}{9},\frac{1}{19},\frac{1}{391}\text{等}\right)$之后，所得的新级数是收敛的，且其和不超过 80.

§ 9.3 正项级数的其他判别法

应用比较判别法，将正项级数与几何级数比较，就派生出下面两个常用的判别法.

定理 9.10(Cauchy 判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数.

1°如果存在正数 $q<1$，使得对充分大的 n 都有

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1.$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

2°如果对无穷多个 n 都有

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1,$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明 1° 由于当 $n>N$ 时有 $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q<1$，即 $a_n \leqslant q^n$，故由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

2°由于有无穷多项都不小于 1，因而 $a_n \not\to 0$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

这个判别法的极限形式用起来更方便.

定理 9.11(Cauchy 判别法的极限形式) 设对所有 $n=1,2,\cdots$ 有 $a_n \geqslant 0$，且

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

那么

1° 当 $q<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

2° 当 $q>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明 1° 因为 $q<1$，可取 $\varepsilon>0$，使得 $q+\varepsilon<1$. 由所设条件，对于所取的 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，有 $\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon<1$. 由定理 9.10 的 1°，即知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收

敛.

2° 当 $q>1$ 时,由于有 $\{a_n\}$ 的子数列 $\{a_{k_n}\}$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k_n]{a_{k_n}}=q>1$. 这说明有无穷多个 n,使得 $\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1$,故由定理 9.10 的 2°,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. □

例 1　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的敛散性.

解　因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{2}>1,$$

所以级数发散. □

例 2　对级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots$$

而言,$a_{2n-1}=\frac{1}{2^n}$,$a_{2n}=\frac{1}{3^n}$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n-1]{a_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{\frac{n}{2n-1}}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{a_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

因而 $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$. 故由 Cauchy 判别法知所给的级数收敛. □

必须注意,如果 $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$,这时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 可能收敛,也可能发散. 例如对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$,但前者是发散的,后者却是收敛的.

在进一步应用比较判别法时,我们需要下面的

引理 9.1　设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 是两个正数列,如果当 $n\geqslant n_0$ 时有不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n},$$

那么

1° 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛;

2° 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也发散.

证明　由假定,当 $n\geqslant n_0$ 时,我们有

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \leqslant \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}},$$

$$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \leqslant \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

把上面各不等式相乘,马上得到

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} \leqslant \frac{b_n}{b_{n_0}},$$

或者

$$a_n \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n.$$

由比较判别法,从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,这就是 1°;从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散,这就是 2°. □

在引理 9.1 中取 $b_n = q^n$,其中 $0<q<1$,就得到下面的D'Alembert 判别法.

定理 9.12(D'Alembert 判别法) 设 $a_n>0, n=1,2,\cdots$.

1° 如果存在正数 $q<1$,使得当 $n \geqslant n_0$ 时有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q,$$

那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2° 如果当 $n \geqslant n_0$ 时有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1,$$

那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

和 Cauchy 判别法一样,它的极限形式用起来更方便些.

定理 9.13(D'Alembert 判别法的极限形式) 设 $a_n>0, n=1,2,\cdots$.

1° 如果 $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q<1$,那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$;

2° 如果 $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q'>1$,那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

证明 1°的证明和定理9.11的1°一样.现证2°.从假定知道,对任意 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n>N$ 时,$\frac{a_{n+1}}{a_n}>q'-\varepsilon$,今取 ε 充分小,使得 $q'-\varepsilon>1$,因而级数发散. □

例3 设 $x\in[0,+\infty)$,讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\ x^n$ 的敛散性.

解 $x=0$ 时级数显然收敛,其和为0.今设 $x>0$,由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\ x^{n+1}}{n!\ x^n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)x=+\infty,$$

所以级数对任意 $x>0$ 都发散. □

例4 设 $x\in[0,+\infty)$,讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$ 的敛散性.

解 $x=0$ 时级数显然收敛.今设 $x>0$,因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{x}{\mathrm{e}}.$$

所以级数当 $x>\mathrm{e}$ 时发散,当 $0\leqslant x<\mathrm{e}$ 时收敛. □

能不能像 Cauchy 判别法那样,从

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q>1,$$

即能断言 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散?结论是否定的.以例2的级数为例,因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n-1}}{a_{2n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=+\infty, \tag{1}$$

所以

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty>1,$$

但该级数却是收敛的.

和 Cauchy 判别法的情况一样,当 $q=1$ 或 $q'=1$ 时,不能对级数的敛散作出判断.级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 就是这样的例子.

Cauchy 判别法和 D'Alembert 判别法哪个强些?为了回答这个问题,先证明

定理9.14 设 $\{a_n\}$ 是任意的正数列,那么

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

证明 我们只证明右端的不等式,左端不等式的证法是一样的.设

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,$$

如果 $q=+\infty$,不等式当然成立.故不妨设 $q<+\infty$.于是对任意 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n\geqslant N$ 时,$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q+\varepsilon$.特别有

$$\frac{a_{N+1}}{a_N}<q+\varepsilon,\quad \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}<q+\varepsilon,\quad \cdots,\quad \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}}<q+\varepsilon,$$

把这些不等式乘起来得 $a_{N+k}<(q+\varepsilon)^k a_N$,或者

$$a_n<a_N(q+\varepsilon)^{-N}(q+\varepsilon)^n.$$

于是
$$\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{a_N(q+\varepsilon)^{-N}}(q+\varepsilon).$$

由此即得

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant q+\varepsilon.$$

再让 $\varepsilon\to0$,即得所要证的不等式. □

从这个定理可以看出,凡是用 D'Alembert 判别法能判别的,用 Cauchy 判别法也一定能判别,但反之不然.仍以例 2 的级数为例,因为

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1.$$

故用 Cauchy 判别法知其收敛.但由(1)知,

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0,\quad \limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty.$$

故用 D'Alembert 判别法不能判别它收敛或发散.由此可见,Cauchy 判别法比 D'Alembert判别法适用的面要宽些,但在有些场合下,使用 D'Alembert 判别法要方便些.

但总的来说,这两个判别法的适用面都不算宽,原因是它们只能判别一些比几何级数收敛得还快的级数.级数收敛的快慢有一些不同的定义.我们这里所说的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 比 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛得快,是指

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$$

成立.例如,当 $0<q<1,\alpha>1,\beta>1$ 时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$ 比 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$收敛得快,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$又比 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\beta}$收敛得快.

可以证明(参见问题9.3第2题),如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足条件

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1 \quad 或 \quad \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q<1,$$

则对任意 $r, q<r<1$,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{r^n}=0.$$

这就是说 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 比几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$ 收敛得快.因此,如果某个级数比几何级数收敛得慢,这两个判别法就无能为力了,必须寻找更精细的判别法.

现在让 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和收敛得较慢的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}(\alpha>1)$ 作比较.根据引理9.1,如果

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha}}}{\dfrac{1}{n^{\alpha}}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha},$$

那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.上面的不等式可以改写为

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\geqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha},$$

即

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\geqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1,$$

两边乘以 n 得

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geqslant\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}-1}{\dfrac{1}{n}}.$$

当 $n\to\infty$ 时,右边趋于 $\alpha>1$.由此看来,如果当 $n>n_0$ 时有不等式

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geqslant r>1,$$

就能断言 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.由此引导出下面的

定理9.15(Raabe判别法) 设 $a_n>0, n=1,2,\cdots$.

1° 如果存在 $r>1$,使得当 $n>n_0$ 时有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geqslant r, \tag{2}$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

2° 如果对充分大的 n 都有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leqslant 1, \tag{3}$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明 1° 取实数 σ,使得 $r>\sigma>1$.由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma}-1}{\frac{1}{n}}=\sigma<r,$$

故对充分大的 n,有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma}<1+\frac{r}{n}.$$

由(2)得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\geqslant 1+\frac{r}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sigma},$$

即

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{\frac{1}{(n+1)^{\sigma}}}{\frac{1}{n^{\sigma}}}.$$

由引理 9.1 即知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

2° 由(3)得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant 1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n},$$

即

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant\frac{n}{n+1}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,故由引理 9.1 知道 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

和前面两个判别法一样,实际应用时,往往用它的极限形式.

定理 9.16 设正数列$\{a_n\}$满足条件:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{l}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),n\to\infty,$$

那么,当 $l>1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;$l<1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证明留给读者作练习.

例 5 设 $\alpha>0$,证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\right|$ 收敛. 这里 $\binom{\alpha}{0}=1$, $\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

证明 因为$\dfrac{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n}\right|}=\dfrac{|\alpha-n|}{n-\alpha}\to1(n\to\infty)$,所以D'Alembert判别法不能判断它的敛散性.现用 Raabe 判别法:因为

$$\begin{aligned}n\left(\frac{\left|\binom{\alpha}{n}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|}-1\right)&=n\left(\frac{n+1}{n-\alpha}-1\right)\\&=\frac{n(1+\alpha)}{n-\alpha}\to1+\alpha>1,\end{aligned}$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\right|<+\infty$. □

§10.5 中将要用到这一结果.

例 6 设 $p>0,q>0$,p,q 取何值时,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\frac{1}{n^q}$$

收敛.

解 用 Raabe 判别法:因为

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}}&=\frac{n+1}{n+p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q=\left(1+\frac{1-p}{n+p}\right)\left(1+\frac{q}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=1+\frac{q}{n}+\frac{1-p}{n+q}+o\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{q+1-p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

所以级数当 $q>p$ 时收敛,$q<p$ 时发散. □

例 7 研究超几何级数

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\ \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

的敛散性,这里 α,β,γ,x 都是正数.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}x=x,$$

故由 D'Alembert 判别知道,$x<1$ 时级数收敛;$x>1$ 时级数发散.当 $x=1$ 时,D'Alembert 判别法不能判断.用 Raabe 判别法:因为

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\gamma-\beta-\alpha)+(\gamma-\alpha\beta)n}{(\alpha+n)(\beta+n)}\\&=1+\gamma-\beta-\alpha,\end{aligned}$$

故当 $\gamma>\beta+\alpha$ 时,级数收敛;$\gamma<\beta+\alpha$ 时,级数发散.当 $\gamma=\alpha+\beta$ 时,Raabe 判别法也无法判断,这时必须用更精细的判别法来判断. □

为了得到更精细的判别法,我们把 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和收敛得更慢的级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}(\alpha>1)$ 作比较.根据引理 9.1,如果 a_n 满足

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{\dfrac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^{\alpha}}}{\dfrac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}},\tag{4}$$

那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.我们分析一下,为了使(4)成立,a_n 应满足怎样的条件.由于

$$\frac{\dfrac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}}{\dfrac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^{\alpha}}}=\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha},$$

而

$$\begin{aligned}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}&=\frac{\ln n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln n}=1+\frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=1+\frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=1+\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha}&=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\alpha}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)\\&=1+\frac{1}{n}+\frac{\alpha}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).\end{aligned}\tag{5}$$

由此可知，如果 a_n 满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right),$$

其中 $\beta>1$，那么 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 由此导出下面的

定理 9.17(Gauss 判别法) 设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right),n\to\infty,\tag{6}$$

那么，当 $\beta>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；$\beta<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证明 先设 $\beta>1$，取 α 使得 $\beta>\alpha>1$. 由(5)和(6)可得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha}=\frac{\beta-\alpha}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).\tag{7}$$

因为 $\beta>\alpha$，所以当 $n>n_0$ 时，上式取正值，即当 $n>n_0$ 时，有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha},$$

由此即得(4)，故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

现设 $\beta<1$，在(7)中取 $\alpha=1$，那么(7)的右端取负值，即

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n+1}{n}\,\frac{\ln(n+1)}{\ln n}.$$

由此即得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\dfrac{1}{n\ln n}}.$$

因为 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散，故由引理 16.1 知道 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. □

例 8 现在研究例 7 中 $\gamma=\alpha+\beta$ 的情形. 容易证明，这时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

这相当于 Gauss 判别法中 $\beta=0$ 的情形，因而级数发散. □

在 Gauss 判别法中，如果 $\beta=1$，那么级数的敛散性还是不能判断，因此必须再找更精细的判别法. 为此我们要把级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和比 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\lg n)^{\alpha}}$ 收敛得更慢的级数作比较. 人们自然想到，如果把级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和某个收敛得“最慢”的级数

作比较,这样得到的判别法当然是最有效的了.但事实上,这种收敛得“最慢”的级数是不存在的(见问题9.3第3题).因而,利用与一个已知的级数作比较,来建立能判断一切级数敛散性的“万能”判别法是不存在的.不过上面介绍的这些判别法,对于一般的级数已经足够用了.

练习题9.3

1. 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{3^n}(\sqrt{3}+(-1)^n)^n$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, x\geqslant 0$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-4}{3n+1}\right)^n$; (8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

2. 利用Raabe判别法,讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})\cdots(a+\sqrt{n})},\quad a>0$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\ n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)},\quad p>0, q>0$.

3. 证明定理9.14左端的不等式.

4. 证明定理9.16.

5. 研究下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\dfrac{n+1}{n}}\right]$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}}-\dfrac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}\right),\quad a>0, b>0, c>0$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)$.

问题 9.3

1. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数. 如果存在正数 α 和 β, 使得 $a_n - a_{n+1} \geqslant \beta a_n^{2-\alpha}$, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, 而且

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = O(a_N^{\alpha}), \quad N \to \infty.$$

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数, 如果

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 \quad 或 \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1,$$

那么对任意 $r \in (q, 1)$, 总有 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{r^n} = 0$.

3. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个收敛的正项级数, 试作一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 使得 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

§9.4 一般级数

所谓一般级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 是指 a_n 可正可负. 例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin nx$$

都属于这种情形.

因为级数的收敛等价于它的部分和数列的收敛, 利用数列的 Cauchy 收敛原理, 立刻得到

定理 9.18 (Cauchy 收敛原理) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时,

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

对一切正整数 p 成立.

这个定理告诉我们,就收敛级数而言,对于事先给定的任意正数 ε,在充分多项的后截取一段(不论这一段有多少项),它的绝对值可以小于 ε.

例 1 设 $\{a_n\}$ 是递减的正数列,如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,那么必有 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$.

证明 根据 Cauchy 收敛原理,对任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

对任意正整数 p 成立.今取 $p=n$,且因 $\{a_n\}$ 是递减的正数列,故当 $n>N$ 时,从(1)可得

$$2na_{2n}\leqslant 2(a_n+\cdots+a_{2n})<\varepsilon. \tag{2}$$

又因

$$(2n+1)a_{2n+1}\leqslant 2na_{2n}+a_{2n+1}\to 0,\ n\to\infty.$$

由上式和(2)即得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$. □

注意:例 1 的逆命题并不成立.即若 $\{a_n\}$ 是递减的正数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$,则未必有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n<+\infty$.最简单的例子是 $a_n=\dfrac{1}{n\ln n}$,它满足递减且 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$ 的条件,但 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 是发散的.

Cauchy 收敛原理是一个普遍的原则,它适用于一切级数,而不考虑某些级数的特殊规律.正因为如此,用它去判别某些具体级数的敛散性并不方便.因此,我们必须针对某些级数的特殊规律,给出相应的判别法.前面关于正项级数的许多判别法就是按照"正项"这个条件来设计的.

现在讨论一般级数中较为特殊的一种——**交错级数**,它的项正负交错地出现.例如

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

便是一个交错级数.我们把一般交错级数记为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots,$$

其中 $a_n>0$, $n=1,2,\cdots$.对于这种级数,有一个很简单的收敛判别法.

定理 9.19 (Leibniz 判别法) 如果 $\{a_n\}$ 递减趋于 0,那么交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

我们把满足上述条件的交错级数称为 Leibniz 级数.

证明 用 S_n 记交错级数的部分和.由于 $\{a_n\}$ 递减,$a_{2n-1}-a_{2n}\geqslant 0$,所以

$$S_{2n}=S_{2n-2}+(a_{2n-1}-a_{2n})\geqslant S_{2n-2}.$$

这说明$\{S_{2n}\}$是一个递增的数列;又因为

$$S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}\leqslant a_1,\tag{3}$$

即$\{S_{2n}\}$有上界,因而$\{S_{2n}\}$是一个收敛数列,记其极限为S.于是

$$S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}\to S,\ n\to\infty.$$

这里用到了条件$a_n\to 0(n\to\infty)$.既然$\{S_n\}$的偶数项子列$\{S_{2n}\}$和奇数项子列$\{S_{2n+1}\}$有相同的极限S,所以$\{S_n\}$也以S为极限,即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛.

□

Leibniz 判别法告诉我们 Leibniz 级数是收敛级数.容易知道下列级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\qquad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln n}$$

都是 Leibniz 级数,因而都是收敛的.

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$是一个 Leibniz 级数,其和为$S$.若用$S_n$代替$S$,其误差不超过第$n+1$项的绝对值,即$|S_n-S|\leqslant a_{n+1}$.事实上,由于$\{S_{2n}\}$递增趋于$S$,而

$$S_{2n+1}=S_{2n-1}-(a_{2n}-a_{2n+1})\leqslant S_{2n-1},$$

即$\{S_{2n+1}\}$递减趋于S,所以不论n是奇数还是偶数,都有

$$|S_n-S|\leqslant|S_n-S_{n+1}|=a_{n+1}.$$

这个结论在误差估计时很有用.

若在(3)的左端让$n\to\infty$,即得$S\leqslant a_1$.这就是说 Leibniz 级数的和不超过它的首项之值.

引理 9.2(分部求和公式) 设$\{a_k\}$,$\{b_k\}$是两列实数,则对任意正整数n有

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})+S_nb_n,\tag{4}$$

这里$S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$.

证明 记$S_0=0$,那么$a_k=S_k-S_{k-1}$,$k=1,2,\cdots,n$.于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k&=\sum_{k=1}^{n}(S_k-S_{k-1})b_k=\sum_{k=1}^{n}S_kb_k-\sum_{k=1}^{n}S_{k-1}b_k\\&=\sum_{k=1}^{n}S_kb_k-\sum_{k=0}^{n-1}S_kb_{k+1}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})+S_nb_n.\quad\square\end{aligned}$$

如果记 $\Delta S_k = S_k - S_{k-1} = a_k$，$\Delta b_k = b_{k+1} - b_k$，那么(4)可写成

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \Delta S_k = S_k b_k \Big|_0^n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k \Delta b_k .$$

这个形式与分部积分公式很相似，所以(4)称为**分部求和公式**.

从分部求和公式可以推出一个重要的引理.

引理 9.3(Abel 引理)　设 $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$ 或 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，记 $S_k = \sum_{l=1}^{k} a_l$，如果 $|S_k| \leqslant M$，$k = 1, \cdots, n$，那么

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leqslant M(|b_1| + 2|b_n|).$$

证明　由分部求和公式得

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| &= \left| \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_n b_n \right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |S_k| |b_k - b_{k+1}| + |S_n| |b_n| \\
&\leqslant M\Big(\sum_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k-1}| + |b_n| \Big) \\
&= M(|b_1 + b_n| + |b_n|) \\
&\leqslant M(|b_1| + 2|b_n|).
\end{aligned}$$ □

利用 Abel 引理便可证明

定理 9.20(Dirichlet 判别法)　设 $\{a_k\}$，$\{b_k\}$ 是两个数列，$S_k = \sum_{l=1}^{k} a_l$. 如果它们满足下面两个条件：

1° $\{b_k\}$ 单调趋于 0；

2° $\{S_k\}$ 有界，

那么级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

证明　我们用 Cauchy 收敛原理证明 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛. 设 $|S_k| \leqslant M$，$k = 1, 2, \cdots$. 于是对任意正整数 n 和 p 及满足条件 $n+1 \leqslant m \leqslant n+p$ 的 m 有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leqslant 2M.$$

由于 $\{b_k\}$ 是单调的，故由 Abel 引理得

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leqslant 2M(|b_{n+1}| + 2|b_{n+p}|). \tag{5}$$

因为 $b_n \to 0$，$n \to \infty$，故对 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，

$$|b_{n+1}|<\frac{\varepsilon}{8M},\quad |b_{n+p}|<\frac{\varepsilon}{8M},\quad p=1,2,\cdots.$$

代入(5)即得 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right|<\varepsilon$，所以 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛. □

如果在上面的级数中取 $a_k=(-1)^{k-1}$，那么

$$|S_k|=|a_1+\cdots+a_n|\leqslant 1,$$

故当 $\{b_k\}$ 递减趋于 0 时，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}b_k$ 收敛，这就是前面已经证明过的 Leibniz 判别法. 可见 Leibniz 判别法只是 Dirichlet 判别法在 $a_k=(-1)^{k-1}$ 的特殊情形.

定理 9.21（Abel 判别法） 如果 $\{a_k\}$，$\{b_k\}$ 满足下面两个条件：

1° $\{b_k\}$ 单调有界；

2° $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛，

那么级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

证明 因为 $\{b_k\}$ 单调有界，故有极限 b. 于是 $\{b_k-b\}$ 单调趋于 0. 又因为 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right|$ 有界，故由 Dirichlet 判别法知，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(b_k-b)$ 收敛，因而

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k=\sum_{k=1}^{\infty} a_k(b_k-b)+b\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

收敛. □

上面两个判别法的条件互有强弱：Dirichlet 判别法中 $\{b_k\}$ 单调趋于 0 的条件比 Abel 判别法中 $\{b_k\}$ 单调有界强；而 $\{S_k\}$ 有界的条件则比 Abel 判别法中 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛的条件弱. 因此，在使用时究竟哪个判别法较好，要针对具体问题作具体分析.

例 2 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}$ 的敛散性.

解 这个级数既非正项级数，又非交错级数. 若命 $b_n=\dfrac{1}{n}$，则 b_n 递减趋于 0. 故若能证明 $\left|\sum\limits_{n=1}^{N}\cos nx\right|\leqslant M, N=1,2,0,\cdots$，那么由 Dirichlet 判别法即知该级数收敛. 事实上，当 $x\neq 2k\pi$ 时，有

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\cos nx\right|=\left|\frac{\sin\left(N+\dfrac{1}{2}\right)x-\sin\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|}. \tag{6}$$

因此,只要 x 不是 2π 的整数倍,上面的和式便有界.所以,原级数当 $x\neq 2k\pi$ $(k=0,\pm1,\cdots)$时收敛;当 $x=2k\pi$ 时,原级数就变成调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,所以是发散的. □

注意:类似于不等式(6)还有

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\sin nx\right|=\left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},x\neq 2k\pi.$$

这一对不等式在有关问题的讨论中颇为有用.

例 3 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的敛散性.

解 由上例知道,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{n}$ 收敛,而数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 递增趋于 e,因而有界.根据 Abel 判别法,该级数收敛. □

例 4 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$ 的敛散性.

解 因为 $\sin^2 n=\frac{1}{2}(1-\cos 2n)$,故若能证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\cos 2n}{n}$ 都收敛,那么原级数收敛.由 Leibniz 判别法,第一个级数收敛.由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+n\pi)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(2+\pi)}{n},$$

故由例 2 知,它也是收敛级数.因而原级数收敛. □

练习题 9.4

1. 利用 Cauchy 收敛原理,讨论下列级数的敛散性:

 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$;

 (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n!)}{n(n+1)}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos n+b\sin n}{n(n+\sin(n!))}$.

2. 试用 Cauchy 收敛原理,证明交错级数的 Leibniz 判别法.

 提示:证明 $\left|\sum\limits_{n=N+1}^{N+p}(-1)^{n-1}a_n\right|\leqslant a_N$.

3. 设 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n,n=1,2,\cdots$,如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都是收敛级数,证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$

也收敛.如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散，结论如何？

4. 在交错级数的 Leibniz 判别法中，如果去掉 $\{a_n\}$ 递减这个条件，结论可能不成立.试以下例说明之：

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\left[\frac{n+1}{2}\right]+(-1)^n}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots.$$

5. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$；　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

6. 设 $\{a_n\}$ 递减趋于 0，讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx,\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin nx$$

的敛散性.

7. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个收敛级数，如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$，能否断言 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也是收敛级数？请研究级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}},\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right\}.$$

8. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0.$$

提示：用分部求和公式.

9. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$ 收敛，那么对任意 $\beta>\alpha$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\beta}$ 也收敛.

10. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项递减趋于 0，p 是任意固定的正整数，证明级数

$$a_1+\cdots+a_p-a_{p+1}-a_{p+2}-\cdots-a_{2p}+a_{2p+1}+\cdots+a_{3p}-\cdots$$

是收敛的.

提示：用 Leibniz 判别法.

问题 9.4

1. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin nx}{n}$.

2. 如果 $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0$，那么交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

3. 设 $a>0,b>0$. 利用 Raabe 判别法证明：当 $b-1>a$ 时，级数

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}$$

收敛，其和为 $\frac{b-1}{b-a-1}$. 当 $b-1\leqslant a$ 时，收敛情况如何？

4. 设 $\{a_n\}$ 是一个正的递增数列，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界.

5. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.

6. 试作一个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，使得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$ 发散.

7. 设 $\{b_n\}$ 递减趋于 0，且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛，证明：

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+\cdots+a_n)b_n=0.$$

8. 设 $\{b_n\}$ 是正的递增趋于 $+\infty$ 的数列，如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，试证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}{b_n}=0.$$

注意：若命 $b_n=n$，就得到练习题 8 的结论. 所以本题是练习题 8 的推广.

9. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，命 $b_n=\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}$，那么 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 也收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

§9.5 绝对收敛和条件收敛

前面我们介绍了一般变号级数的两个重要判别法,但对于某些变号级数来说,可以用更简单的方法判定它收敛.例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{[\sqrt{n}]}\frac{1}{n^2}$ 各项的符号变化规律并不容易掌握,但若干脆让每项都取绝对值,便得一个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.问题是从 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 的收敛能否推出 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛?结论是肯定的,这实际上是 Cauchy 收敛原理的一个简单的推论.

定理 9.22 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛,那么 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

证明 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛,根据 Cauchy 收敛原理,对任意 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n>N$ 时,

$$|a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+p}|<\varepsilon \tag{1}$$

对任意正整数 p 成立.于是由(1)知,当 $n>N$ 时,不等式

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|\leqslant|a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+p}|<\varepsilon$$

对任意正整数 p 成立,因而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. □

由这个定理,易知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$$

都是收敛的.

可是必须注意,上面定理的逆命题是不成立的,即从 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛.级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$使是这样的例子.

由此可见,所有收敛的变号级数可以分成两类:一类是 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 也收敛;另一类是 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散.我们把前一类级数叫做**绝对收敛级数**,后一类叫做**条件收敛级数**.

例如上面的三个级数都是绝对收敛级数,而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}$·

$\frac{1}{\ln n}$便是条件收敛级数.

例 1 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$条件收敛.

证明 这个级数的收敛性已在§9.4的例4中证明过.现在证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n} \tag{2}$$

发散.如果(2)收敛,则因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}$收敛,因而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

也收敛,这显然不成立.所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}$发散. □

绝对收敛级数和条件收敛级数有十分显著的差别.

大家知道,有限个数相加时,被加项可以任意交换次序而不影响其和.无限多个数相加时,情况就不同了.当然,如果只交换级数中有限多项的次序,那么既不改变级数的收敛性,也不会改变它的和.但若交换级数中无穷多项的次序,在级数是条件收敛的情况下,就有可能改变级数的和,甚至使其发散.而绝对收敛级数则可以任意改变其项的次序而不影响级数的绝对收敛性,也不改变其和.

定理 9.23 交换绝对收敛级数中无穷多项的次序,所得的新级数仍然绝对收敛,其和也不变.

证明 我们把证明分为两步:

1° 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一个收敛的正项级数,交换其中无穷多项的次序所得的新级数记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.易知新级数的任何一个部分和 $\sum\limits_{n=1}^{N}b_n$ 都是从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 中挑选出某有限项构成的和,因而

$$\sum_{n=1}^{N}b_n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_n. \tag{3}$$

另一方面,我们也可把 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 看成是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 经交换项的次序后得到的新级数,因而有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{4}$$

综合(3)和(4)即得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. 这就证明了命题对正项级数成立.

2° 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个变号的绝对收敛级数. 记

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2}, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{5}$$

即

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & 若\ a_n \geqslant 0, \\ 0, & 若\ a_n < 0; \end{cases} \quad a_n^- = \begin{cases} -a_n, & 若\ a_n \leqslant 0, \\ 0, & 若\ a_n > 0. \end{cases}$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 是两个正项级数,前者是由原级数中的正项和零组成的级数,后者是由负项的绝对值和零组成的级数. 从(5)可得

$$0 \leqslant a_n^+ \leqslant |a_n|, \quad 0 \leqslant a_n^- \leqslant |a_n|,$$
$$|a_n| = a_n^+ + a_n^-, \quad a_n = a_n^+ - a_n^-.$$

从 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$,即知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收敛,且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-. \tag{6}$$

设改变 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中无穷多项次序所得的新级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,那么显然 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^-$ 是分别由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 改变项的次序得来的. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都是收敛的正项级数,故由 1° 所证得知

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-. \tag{7}$$

从 $|b_n| = b_n^+ + b_n^-$ 即知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛,而且

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^-. \tag{8}$$

从(6),(7),(8)三个等式,即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \quad \square$$

从(5)可以看出,如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛,那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.$$

这是条件收敛级数与绝对收敛级数最大的不同之处. 正是从这一事实出发, Riemann 证明了下面关于条件收敛级数的一个非常深刻的结果.

定理 9.24(Riemann) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛,则适当交换各项的次序,可使其收敛到任一事先指定的实数 S,也可使其发散到 $+\infty$ 或 $-\infty$.

证明 分两种情形来讨论.

1° 不妨假定 $S>0$. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛,所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty.$$

为了使级数的和为 S,我们这样来安排级数中项的次序:按照级数原来的次序,把它的正项取出来,只要它们的和还不大于 S,就一直取下去,直到这些项的和刚刚大于 S 为止. 接着就取级数的负项(按照它们原来的次序)我们又可取得足够多负项,使整个和刚好小于 S 为止. 然后再按原来的次序把剩下的正项依次取来,直到整个和刚好大于 S 为止. 这个过程无休止地进行下去. 把上面这个过程用符号表示出来,就是先按次序选取 k_1 个正项,使得

$$\sum_{j=1}^{k_1-1} a_j^+ \leqslant S < \sum_{j=1}^{k_1} a_j^+.$$

由此可得

$$0 < \sum_{j=1}^{k_1} a_j^+ - S \leqslant a_{k_1}^+.$$

为简化记号,记 $A_1^+ = \sum_{j=1}^{k_1} a_j^+$. 那么上式可写为

$$0 < A_1^+ - S \leqslant a_{k_1}^+. \tag{9}$$

再按次序取出 l_1 个负项,使得

$$A_1^+ - \sum_{j=1}^{l_1} a_j^- < S \leqslant A_1^+ - \sum_{j=1}^{l_1-1} a_j^-.$$

记 $A_1^- = \sum_{j=1}^{l_1} a_j^-$,从上式可得

$$0 < S - (A_1^+ - A_1^-) \leqslant a_{l_1}^-. \tag{10}$$

再取 k_2 个正项,使得

$$A_1^+ - A_1^- + \sum_{j=k_1+1}^{k_2-1} a_j^+ \leqslant S < A_1^+ - A_1^- + \sum_{j=k_1+1}^{k_2} a_j^+.$$

记 $A_2^+ = \sum_{j=k_1+1}^{k_2} a_j^+$，那么从上式可得

$$0 < A_1^+ - A_1^- + A_2^+ - S < a_{k_2}^+. \tag{11}$$

把这个过程无限地继续下去，可得下面的无穷级数

$$A_1^+ - A_1^- + A_2^+ - A_2^- + \cdots, \tag{12}$$

从(9)，(10)，(11)知道，(12)满足下面的不等式：

$$0 < A_1^+ - A_1^- + A_2^+ - A_2^- + \cdots + A_n^+ - S \leqslant a_{k_n}^+, \tag{13}$$

$$0 < S - (A_1^+ - A_1^- + A_2^+ - A_2^- + \cdots + A_n^+ - A_n^-) \leqslant a_{l_n}^+ \tag{14}$$

如果记(12)的部分和为 S_n，那么(13)、(14)可写为

$$0 < S_{2n-1} - S \leqslant a_{k_n}^+, \quad 0 < S - S_{2n} \leqslant a_{l_n}^-.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以 $\lim_{n\to\infty} a_{k_n}^+ = \lim_{n\to\infty} a_{l_n} = 0$. 由此即得

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

即级数(12)的和是 S. 最后应用定理 9.4 即得

$$a_1^+ + \cdots + a_{k_1}^+ - a_1^- - \cdots - a_{l_1}^- + \cdots = S.$$

2° 现在考虑 $S = +\infty$ 的情形. 为了使级数发散到 $+\infty$，我们这样来安排级数的项，先按级数原来的次序取出若干正项，使其和大于 1，在这些项的后面放上级数的第一个负项；然后再在余下的正项中取若干项，使整个和大于 2，又在这些项之后放上级数的第二个负项；再在余下的正项中取出若干项，使整个和大于 3，接着放上第三个负项. 无限继续这个过程，得一个新级数，它是由原级数交换无限多项的次序得到的. 由于 n 充分大时 a_n^- 可以任意小，故当 $n > N$ 时，负项的出现并不影响级数部分和的增大，所以级数发散到 $+\infty$. 同样可以适当交换项的次序，使其发散到 $-\infty$. □

让我们用一个例子作为本节的结尾.

例 2 把级数

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots$$

的项重新安排如下：先依次取 p 个正项，接着依次取 q 个负项，再接着依次取 p 个正项，如此继续下去. 试证所得新级数收敛的充分必要条件是 $p = q$；当 $p > q$ 时，新级数发散到 $+\infty$；当 $p < q$ 时，新级数发散到 $-\infty$.

证明 设重排以后的新级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 对于任给的正整数 N，记 $m = \left[\frac{N}{p+q}\right]$，则当 $N \to \infty$ 时有 $m \to \infty$，且 $m(p+q) \leqslant N < (m+1)(p+q)$. 把

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和写成

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{m(p+q)} a_n + \sum_{n=m(p+q)+1}^{N} a_n. \tag{15}$$

因为 $N - m(p+q) < p+q$，这说明第二个和式的项数不超过 $p+q$. 因而当 $N\to\infty$ 时，有

$$\left|\sum_{n=m(p+q)+1}^{N} a_n\right| \leqslant \sum_{n=m(p+q)+1}^{N} |a_n| \leqslant (p+q)\frac{1}{\sqrt{m(p+q)}}$$

$$= \frac{\sqrt{p+q}}{\sqrt{m}} \to 0.$$

于是从(15)便得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m(p+q)} a_n$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \sum_{n=1}^{mq}\frac{1}{\sqrt{2n}}\right). \tag{16}$$

在定理 7.20 的(5)中取 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，立刻可得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \beta + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), n\to\infty,$$

这里 β 是某个常数. 于是

$$\sum_{n=1}^{mq}\frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{mq}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{mq} + \beta + O\left(\frac{1}{\sqrt{mq}}\right)\right)$$

$$= \sqrt{2mp} + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta + O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right). \tag{17}$$

$$\sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{\sqrt{2n-1}} = \sum_{n=1}^{2mp}\frac{1}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$= 2\sqrt{2mp} + \beta + O\left(\frac{1}{\sqrt{2mp}}\right) - \sqrt{2mp}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\beta + O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

$$= \sqrt{2mp} + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\beta + O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right). \tag{18}$$

把(17)和(18)代入(16)，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty}\left(\sqrt{2m}(\sqrt{p}-\sqrt{q}) + (1-\sqrt{2})\beta + O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\right)$$

$$=\begin{cases}(1-\sqrt{2}\beta), & \text{若 } p=q \\ +\infty, & \text{若 } p>q, \\ -\infty, & \text{若 } p<q.\end{cases}$$

这就是要证明的. □

练习题 9.5

1. 下列级数,哪些是绝对收敛的? 哪些是条件收敛的?

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^{\alpha}},\alpha>1$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n}}\cos nx$;

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{n\ln n}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\dfrac{n^{10}}{a^{n}},a>1$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{n-1}{n+1}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$; (6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{4}}{\ln n}$.

2. 讨论下列级数的绝对收敛性和条件收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{\cos 2n}{n^{p}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right)$;(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(n^{\frac{1}{n}}-1)$.

3. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛的充分必要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{+}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{-}$ 都收敛.

4. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,证明:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{+}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{-}=+\infty$,逆命题是否成立?

(2) 记 $S_N^{+}=\sum\limits_{n=1}^{N}a_n^{+},S_N=\sum\limits_{n=1}^{N}a_n$,那么

$$\lim_{N\to\infty}\frac{S_N^{+}}{S_N}=1.$$

问题 9.5

1. 讨论下列级数的绝对收敛性和条件收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^{n}}{n^{p}}\right),p>0$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}\right)^{p}, p>0$;

(3) $\frac{1}{1^{p}}-\frac{1}{2^{q}}+\frac{1}{3^{p}}-\frac{1}{4^{q}}+\frac{1}{5^{p}}-\frac{1}{6^{q}}+\cdots, p>0, q>0$.

2. 如果对任意一个趋于 0 的数列 $\{x_n\}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 都收敛，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 一定绝对收敛，试证之. 如果把条件中的“任意一个趋于 0 的数列”改为“任意一个递减趋于 0 的数列”，结论是否成立？

3. 若把级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

的项重新这样安排：先依次取 p 个正项，接着依次取 q 个负项，再接着依次取 p 个正项，如此继续下去. 试证所得新级数的和为

$$\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

4. 把级数

$$1-\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}-\frac{1}{4^{\alpha}}+\frac{1}{5^{\alpha}}-\frac{1}{6^{\alpha}}+\cdots, 0<\alpha<1$$

的项重新安排如下：先依次取 p 个正项，接着依次取 q 个负项，再接着依次取 p 个正项. 如此继续下去. 证明所得新级数收敛的充分必要条件是 $p=q$；当 $p>q$ 时，新级数发散到 $+\infty$；当 $p<q$ 时，新级数发散到 $-\infty$.

5. 如果改变调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

中项的符号，使得 p 个正项之后，跟 q 个负项，但不变更原来的次序. 证明新的级数仅当 $p=q$ 时收敛.

6. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，$\lim_{n\to\infty} b_n=0$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}(a_1 b_n+a_2 b_{n-1}+\cdots+a_n b_1)=0.$$

§9.6 级数的乘法

设

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A,\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \tag{1}$$

是两个收敛级数，我们讨论这两个级数如何相乘．大家知道，两个有限和

$$A_n=\sum_{i=1}^{n} a_i,\quad B_m=\sum_{j=1}^{m} b_j$$

相乘的结果是把所有可能的乘积 $a_ib_j(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m)$ 加起来．仿照这个做法，我们把(1)的所有可能的乘积写出来：

$$\begin{aligned}&a_1b_1,a_1b_2,a_1b_3,\cdots;\\&a_2b_1,a_2b_2,a_2b_3,\cdots;\\&a_3b_1,a_3b_2,a_3b_3,\cdots;\\&\cdots\cdots\end{aligned}$$

这是一个无穷矩阵．这些项如何相加？通常有两种加法，一是按对角线相加：

$$a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+\cdots;$$

一是按方块相加：

$$\begin{aligned}&a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1)\\&\quad+(a_1+b_3+a_2b_3+a_3b_3+a_3b_2+a_3b_1)+\cdots,\end{aligned}$$

用得较多的是按对角线相加．

按照对角线相加的原则，两级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 相乘，得一个新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$，其中

$$c_n=\sum_{i+j=n+1} a_ib_j=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1.$$

称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的 Cauchy 乘积．我们当然希望在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=A$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=B$ 的情况下有

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n=AB=\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\Big).$$

但实际情况并非总是如此．在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=A$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=B$ 都收敛的情况下，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 可能是发散的．例如

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

是一个收敛级数，它按 Cauchy 方式自乘后所得的级数便是发散的．事实上，这时 $a_n=b_n=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，于是

$$|c_n|=\sum_{i+j=n+1}\frac{1}{\sqrt{ij}}\geqslant\sum_{i+j=n+1}\frac{2}{i+j}=\frac{2n}{n+1}\geqslant 1.$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散.

但若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛，不论以何种方式相加，所得的新级数都绝对收敛，其和就是两级数和的乘积.

定理 9.25(Cauchy) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛，其和分别为 A，B，那么把

$$a_i b_j \quad (i,j=1,2,\cdots)$$

按任意方式相加所得的级数都是绝对收敛的，且其和就等于 AB.

证明 设 $a_{i_l}b_{j_l}(l=1,2,\cdots)$ 是 $a_ib_j(i,j=1,2,\cdots)$ 的任意一种排列. 对于给定的 n，把 $i_1,\cdots,i_n$ 和 $j_1,\cdots,j_n$ 中的最大者记为 N，那么

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n} |a_{i_l}b_{j_l}| &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{N}|a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{N}|b_j|\right)\\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|\right).\end{aligned}$$

因而级数 $\sum_{l=1}^{\infty} a_{i_l}b_{j_l}$ 绝对收敛. 根据定理 9.23，任意改变这级数中项的次序，其和不变. 现在按方块相加的方式重新排列这个级数，便得

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{\infty} a_{i_l}b_{j_l} &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N}b_j\right)\\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}b_j\right)=AB. \quad \square\end{aligned}$$

如果只限于 Cauchy 乘积，那么定理 9.25 的条件还可减弱. 我们有

定理 9.26(Mertens) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，其和分别为 A 和 B. 如果其中至少有一个绝对收敛，那么它们的 Cauchy 乘积有

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB,$$

其中 $c_n = \sum_{i+j=n+1} a_i b_j$.

证明 不妨假定 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 记 $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，$B_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$，$C_n=\sum_{k=1}^{n}c_k$. 我们要证明 $\lim_{n\to\infty}C_n = AB$. 易知

$$\begin{aligned}C_n &= a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+\cdots\\ &\quad +(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)\end{aligned}$$

$$=a_1(b_1+b_2+\cdots+b_n)+a_2(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1})+\cdots+a_nb_1$$
$$=a_1B_n+a_2B_{n-1}+\cdots+a_nB_1.$$

如果命 $B_n=B-\beta_n$，则 $\beta_n\to 0(n\to\infty)$. 于是

$$C_n=A_nB-\gamma_n,$$

其中

$$\gamma_n=\sum_{l=1}^{n}a_l\beta_{n+1-l}=a_1\beta_n+a_2\beta_{n-1}+\cdots+a_n\beta_1. \tag{2}$$

这样问题就归结为证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$. 故对任意 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，有 $|\beta_n|<\varepsilon$. 于是从(2)可得

$$|\gamma_n|\leqslant|a_1\beta_n+\cdots+a_{n-N}\beta_{N+1}|+|a_{n-N+1}\beta_N+\cdots+a_n\beta_1|$$
$$<\varepsilon M+|a_{n-N+1}\beta_N+\cdots+a_n\beta_1|,$$

这里 $M=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|<+\infty$. 在上式中固定 N，让 $n\to\infty$，即得

$$\limsup_{n\to\infty}|\gamma_n|\leqslant\varepsilon M.$$

由此即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0$. 因而 $\lim\limits_{n\to\infty}C_n=AB$. □

如果两个级数都仅仅是条件收敛，那么定理的结论就可能不对，本节开头已经举出了这样的例子. 但若假定它们的 Cauchy 乘积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 是收敛的，那么结论仍然成立(见定理 10.19).

注意，定理 9.25 和 9.26 的条件都不是必要的，可以举出这样的例子，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 却是绝对收敛的(见问题 9.6 第 2 题).

例 1 用 D'Alembert 判别法容易验证，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ 对任意实数 x 都绝对收敛，用 $E(x)$ 记它的和. 我们来计算乘积 $E(x)E(y)$. Cauchy 乘积 $E(x)E(y)$ 的通项是

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\,(n-k)!}x^ky^{n-k}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}=\frac{(x+y)^n}{n!}.$$

因而有

$$E(x)E(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}=E(x+y). \quad \square$$

其实在本章开头，我们已经指出，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ 的和就是指数函数 e^x. 这里不过是从级数出发证明了指数函数的乘法定理.

练习题 9.6

1. 设$|q|<1$,证明:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n.$$

2. 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 对$(-R,R)$中的 x 绝对收敛,证明:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,$$

其中 $c_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$.

3. 证明级数

$$C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

对所有实数 x 绝对收敛,而且

$$S(2x)=2S(x)C(x).$$

问题 9.6

1. 证明下面两个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\alpha}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\beta}},\quad \alpha>0,\beta>0$$

的 Cauchy 乘积当 $\alpha+\beta>1$ 时收敛,当 $\alpha+\beta\leqslant 1$ 时发散.

2. 证明下面两个发散级数

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n,\quad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

的 Cauchy 乘积是一个绝对收敛级数.

§9.7 无穷乘积

给定数列

$$p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots,$$

我们已经学会如何把这无穷多个数相加,现在讨论如何把这无穷多个数相乘.称

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 p_2 \cdots p_n \cdots$$

为一个**无穷乘积**.仿照无穷级数的做法,我们定义无穷乘积收敛和发散的概念.

设 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 是一个无穷乘积,称

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k = p_1 \cdots p_n, n = 1, 2, \cdots$$

为这个无穷乘积的**部分乘积**.如果当 $n \to \infty$ 时,数列 $\{P_n\}$ 有有限的极限 P,而且 $P \neq 0$,则称这个无穷乘积是收敛的,记为 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n = P$.如果 $\{P_n\}$ 的极限不存在,或者虽然存在但却等于0,就说它是发散的.

例1 无穷乘积 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ 是收敛的,因为

$$\begin{aligned}
P_{n-1} &= \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right) \\
&= \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k} \\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\right)\cdot \\
&\quad \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2}, n \to \infty. \quad \square
\end{aligned}$$

例2 证明当 $|x|<1$ 时,

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+x^{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{1-x}.$$

事实上,用 $1-x$ 乘它的部分乘积 P_n,即得

$$\begin{aligned}
(1-x)P_n &= (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}}) \\
&= 1-x^{2^n}.
\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^n}}{1-x} = \frac{1}{1-x}. \quad \square$$

例3 证明 Wallis 公式:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

证明

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{2k-1}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} \\ &= \prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{2k-1}\prod_{k=2}^{n+1}\frac{1}{2k-1} \\ &= \frac{1}{2k+1}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)^2}, \end{aligned}$$

由§7.9的Wallis公式,即得

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{\pi}{2}.\quad\square$$

这实际上是§7.9的Wallis公式的另一种表达方式.

例4 设 $p_n=\frac{1}{2}$, $n=1,2,\cdots$,则其部分乘积

$$P_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\to 0,\ n\to\infty.$$

所以无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots$是发散的. $\square$

类似于无穷级数,容易得到无穷乘积收敛的必要条件.

定理9.27 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}p_n=1.$$

证明很简单.设 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n=P\neq 0$,于是

$$p_n=\frac{P_n}{P_{n-1}}\to\frac{P}{P}=1,\ n\to\infty.\quad\square$$

如果 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n=P=0$,上面的结论就可能不对,例4便是这样的例子.由此可以看出,为什么在收敛的定义中要去掉 $P=0$ 的情形.下面我们将一再看到,只有那种 P_n 的极限存在而且不等于0的无穷乘积,才有许多类似于无穷级数的性质.

由于收敛的无穷乘积的通项 $p_n\to 1(n\to\infty)$,因而从某个 n 起,p_n 都是正数,因此在整个无穷乘积中,负因子只能有有限个.所以不妨假定所有的 p_n 都是正的.在下面的讨论中,把 p_n 写成

$$p_n=1+a_n,\ n=1,2,\cdots,$$

其中 $-1<a_n<+\infty$.这样 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$收敛的必要条件便是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

下面来建立无穷乘积与无穷级数之间的联系,从而把判别无穷乘积敛散的问题归结为判别无穷级数的敛散.

定理 9.28 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$收敛的充分必要条件是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n) \tag{1}$$

收敛.在收敛的情况下,如果(1)的和是 S,那么

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = e^S.$$

证明 因为 $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$,所以

$$\ln P_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+a_n) = S_n,$$

这里 S_n 是级数(1)的部分和.如果 $P_n \to P > 0$,那么 $S_n \to \log P$.反之,当 $S_n \to S$ 时,$P_n \to e^S$. □

从上面的定理马上可得

定理 9.29 如果从某个 n 起都有 $a_n > 0$(或 $a_n < 0$),那么 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同时敛散.

证明 因为不论 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 何者收敛,都有$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.因此总可假定这个条件成立.这时有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1.$$

因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同敛散,从定理9.28即得本定理的结论. □

如果 a_n 不保持定号,我们有

定理 9.30 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$,那么 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同敛散.

证明 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$,一方面推出$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,因而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

另一方面从(2)推知 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - \ln(1+a_n))$收敛.根据定理 9.28 即知 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+$

a_n)与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同敛散. □

注意:如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=+\infty$,结论可能不对.这样的例子参见问题9.7第3题.

再讨论一下 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$发散到0的情形.由

$$\ln P_n=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+a_n)$$

可以看出,$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$发散到0的充分必要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)=-\infty.$$

由此可得

定理9.31 如果$-1<a_n<0$,且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,那么 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$发散到0.

定理9.32 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散,那么 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$发散到0.

证明 因为从 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=+\infty$和(2)便知

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-\ln(1+a_n))=+\infty.$$

但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,故必有 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)=-\infty$,因而 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$发散到0. □

例5 从 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$立刻知道

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=+\infty,\quad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=0.$$ □

例6 从 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$,知道

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right),\quad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

都收敛.后者在例1中已算出它的值为$\frac{1}{2}$.

例7 设$\alpha>-1$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}\binom{\alpha}{n}=0$,这里

$$\binom{\alpha}{0}=1,\quad \binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

证明　容易看出

$$\begin{aligned}(-1)^n\binom{\alpha}{n}&=(-1)^n\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\\&=\left(1-\frac{\alpha+1}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha+1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha+1}{n}\right)\\&=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha+1}{k}\right).\end{aligned}$$

因为 $\alpha+1>0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha+1}{n}$ 发散，故由定理 9.31 无穷乘积发散到 0，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\binom{\alpha}{n}=0$．□

在 §10.5 的例 3 中将要用到这一结果．

例 8　设 $\alpha>0$，讨论无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\tag{3}$$

的敛散性．

解　记 $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\alpha}}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛．当 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}$ 收敛，故由定理 9.30，这时无穷乘积(3)收敛．当 $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散，因而由定理 9.32，无穷乘积(3)发散到 0．□

收敛的无穷乘积能不能任意改变因子的次序？答案是否定的．很容易举出这样的例子：取一个条件收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，那么 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 便是一个不能任意改变因子次序的收敛的无穷乘积．事实上，在所设的条件下，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 当然收敛，但因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=+\infty$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\ln(1+a_n)|=+\infty$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 是一个条件收敛级数，设其和为 α．今改变 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 的次序，得一个新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)$，使其和为 $\beta\neq\alpha$．于是

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)=\mathrm{e}^{\beta}\neq\mathrm{e}^{\alpha}=\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n),$$

而 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ 正是由 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 改变因子次序所得的无穷乘积．

在什么条件下可以保证收敛的无穷乘积能任意改变因子的次序？为此引进无穷乘积绝对收敛的概念．

如果无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$收敛,就称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$**绝对收敛**.

定理 9.33 绝对收敛的无穷乘积一定收敛.

证明 设 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$收敛,由定理 9.29 知道,$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛,因而$\sum_{n=1}^{\infty}|\ln(1+a_n)|$收敛,从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$收敛.再从定理 9.28 即知 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$收敛. □

定理 9.34 任意改变绝对收敛的无穷乘积因子的次序,所得新无穷乘积仍然绝对收敛,且其积不变.

证明 设 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$绝对收敛.任意改变其因子的次序得一个新的无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$.从定理 9.33 的证明知道,这时 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$也绝对收敛,所以它可以任意改变求和的次序,因而 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)$也绝对收敛,而且 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$.从而 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$绝对收敛,而且

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n). \quad \square$$

练习题 9.7

1. 证明下列等式:

(1) $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$; (2) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)=\frac{1}{3}$;

(3) $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)=2$.

2. 试用 Wallis 公式证明:

(1) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{2}{\pi}$; (2) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

3. 讨论下列无穷乘积的敛散性:

(1) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; (2) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$;

(3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$.

4. 讨论下列无穷乘积的敛散性：

(1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$；

(2) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$，$p$ 为任意实数；

(3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}$，$x\neq0,-1,-2,\cdots$.

5. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2<+\infty$，则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos a_n$ 收敛.

6. 能否由 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$，$\prod\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 的收敛性，得出下列乘积的收敛性？

$$\prod_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n),\quad \prod_{n=1}^{\infty}p_nq_n,\quad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}.$$

7. 证明 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$，$x\neq0$.

问题 9.7

1. 证明等式

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots=\frac{\pi}{2}.$$

2. 设 $a_1=1$，$a_n=n(a_{n-1}+1)$，$n=2,3,\cdots$. 证明

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=\mathrm{e}.$$

3. 设

$$a_n=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{k}}, & n=2k-1;\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k\sqrt{k}}, & n=2k,\end{cases}$$

证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 都发散，但 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛.

4. 证明 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=0$，并由此证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n}=0.$$

5. 如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x^2-1)(x^2-2^2)\cdots(x^2-n^2)$$

在 $x=x_0$(非整数)处收敛,那么它对所有的 x 都收敛.

6. 设正数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+O(b_n),\ n\to\infty,$$

这里 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是一个绝对收敛级数,那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

第 10 章　函数列与函数项级数

§ 10.1　问题的提出

有了上一章数项级数的知识，就有可能讨论如何通过无穷多个函数的迭加来产生新函数，以及研究这样产生的新函数的性质.

设

$$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$$

是定义在区间$[a, b]$上的一列函数，称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{1}$$

是$[a, b]$上的一个**函数项级数**. 在$[a, b]$中任取一点 x_0，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$便是一个数项级数. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛，就说函数项级数(1)在点 x_0 收敛，反之，就说(1)在点 x_0 发散. 如果(1)在$[a, b]$的每点都收敛，就说(1)在区间$[a, b]$上收敛或在区间$[a, b]$上逐点收敛. 一般来说，(1)可能在$[a, b]$的某些点上收敛，在另一些点上发散. 使(1)收敛(或发散)的那些点的全体称为(1)的**收敛**(**或发散**)**点集**. 例如

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

是定义在$(-\infty, +\infty)$上的函数项级数，它的收敛点集是区间$(-1, 1)$，发散点集是区间$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

设$[a, b]$是(1)的收敛点集. 对$[a, b]$中每一点 x，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$都有一个确定的和，记为 $S(x)$，那么

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), x \in [a, b]$$

是确定在$[a, b]$上的一个函数，称为(1)的**和函数**. 我们首先关心的是，由无穷级

数(1)所确定的和函数 $S(x)$ 是否具有有限和的那些性质？也就是：

(i) 如果函数 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，它们的和函数 $S(x)$ 是否也在 $[a,b]$ 上连续？

(ii) 如果 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 都在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，它们的和函数 $S(x)$ 是否也在 $[a,b]$ 上可积？如果 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，等式

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x$$

是否成立？或者说，积分号与求和号能否交换？即级数能否"**逐项积分**"？

(iii) 如果 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 都在 $[a,b]$ 上可导，$S(x)$ 是否也在 $[a,b]$ 上可导？等式

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$$

是否成立？或者说，级数是否可以"**逐项求导**"？

上面三条，对于有限个函数的和都是正确的，但对无穷级数的和则未必成立.

为了说明这个问题，我们注意，如果记级数(1)的部分和序列为 $S_n(x)$，即

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),$$

那么 $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$，即 $S(x)$ 是函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的极限函数. 上面三个问题便可等价地转化为：

(i)′ 如果 $\{S_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上一列收敛的连续函数，其极限函数 $S(x)$ 是否在 $[a,b]$ 上连续？

(ii)′ 如果 $\{S_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上一列收敛的可积函数，其极限函数 $S(x)$ 是否在 $[a,b]$ 上可积？如果 $S(x)$ 可积，等式

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x$$

是否成立？即极限号与积分号能否交换？

(iii)′ 如果 $\{S_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上一列收敛的可导函数，其极限函数 $S(x)$ 是否在 $[a,b]$ 上可导？如果 $S(x)$ 可导，等式

$$S'(x)=\lim_{n\to\infty}S_n'(x)$$

是否成立？即极限号与微分号能否交换？

下面三个例子说明，上面三个问题的答案有时是否定的.

例 1 在区间 $[0,1]$ 上考虑函数序列 $\{x^n\}$，它的每一个函数当然都在 $[0,1]$ 上连续、可导，但它的极限函数

$$S(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1\end{cases}$$

在 $x=1$ 处不连续，当然也不可导. 这个例子给出了问题(i)′和(iii)′前半个问题的否定答案. □

例 2 设$\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$是区间$[0,1]$上的全体有理数. 在$[0,1]$上定义

$$S_n(x)=\begin{cases}1, & x=r_1,r_2,\cdots,r_n,\\ 0, & x=\text{其他值},\end{cases}\quad S(x)=\begin{cases}1, & x=\text{有理数},\\ 0, & x=\text{无理数}.\end{cases}$$

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$. 对于每一个固定的 n，$S_n(x)$是$[0,1]$中的 Riemann 可积函数，而 $S(x)$在$[0,1]$中不可积. 这个例子给出了问题(ii)′前半个问题的否定答案. □

例 3 在$[0,1]$上考虑函数序列

$$S_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2},n=1,2,\cdots.$$

显然

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0.$$

因而$\int_0^1 S(x)dx=0$. 但

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}(1-e^{-n^2})=1.$$

这个例子给出了问题(ii)′后半个问题的否定答案. □

例 4 在$(-\infty,+\infty)$中考虑函数列

$$S_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}},n=1,2,\cdots.$$

显然

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0,$$

它在$(-\infty,+\infty)$当然可导，但

$$S_n'(x)=\sqrt{n}\cos nx\not\to 0,x\in(-\infty,+\infty),$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n'(x)\neq S'(x)$. 这个例子给出了问题(iii)′后半个问题的否定答案. □

由此看来，要使上面三个命题成立，还必须补充条件，下节介绍的“一致收敛”便是这种条件中最重要的一个.

练习题 10.1

1. 求下列函数项级数的收敛点集：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n+1}\left(\frac{x}{3x+1}\right)^n$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n$； (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$； (6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n y^n}{x^n+y^n}$；

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}, x>0$； (8) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^x, x>0$.

2. 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上收敛于 $S(x)$，如果 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 都是 $[a,b]$ 上的非负连续函数，证明 $S(x)$ 必在 $[a,b]$ 上取到最小值.

3. 在上题中 $S(x)$ 是否一定能取到最大值?

4. 把第 1 题中的有界闭区间 $[a,b]$ 换成开区间 (a,b) 或无穷区间，结论是否成立?

§10.2 一致收敛

设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个函数列. 对于 $x_0\in[a,b]$，如果数列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛，就说函数列 $\{f_n\}$ 在 x_0 点收敛. 如果 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 中每点都收敛，就说 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛或在 $[a,b]$ 上逐点收敛.

现设 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 f，因为 $[a,b]$ 中有无穷多个点，这就意味着无穷多个数列收敛. 一般来说，这些数列收敛的快慢是不一致的，有的收敛得快些，有的慢些. 用 $\varepsilon-N$ 的语言来说，对于任给的 $x_0\in[a,b]$ 和任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(x_0,\varepsilon)$，当 $n>N$ 时，就有

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

这里的 $N=N(x_0,\varepsilon)$ 不仅与 ε 有关，也与 x_0 有关. 对于同一个 $\varepsilon>0$，不同的 x_0 所要求的 $N(\varepsilon,x_0)$ 值可以相差很大.

拿上节的例 1 来说，$f_n(x)=x^n$，对于 $(0,1)$ 中每个点 x，函数列都收敛于 $f(x)=0$. 对于 $0<\varepsilon<1$，要使

$$|f_n(x)-f(x)|=x^n<\varepsilon,$$

必须

$$n > N(x,\varepsilon) = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln x}\right]. \tag{1}$$

对于不同的 x,相应的 $N(x,\varepsilon)$就很不一样.例如要使

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n < \frac{1}{10^{100}},$$

即 $\varepsilon = 10^{-100}$,在 $x = x_1 = \frac{1}{10^{10}}$处,只要

$$n > N(x_1,\varepsilon) = 10$$

就行;而在 $x = x_2 = \frac{1}{10^4}$处,必须

$$n > N(x_2,\varepsilon) = 25$$

才行;而在 $x = x_3 = \frac{1}{10}$处,则必须

$$n > N(x_3,\varepsilon) = 100$$

才行.由此可见,当 x 越靠近原点,$|x^n|$收敛于0的速度越快.那么对任意给定的 $\varepsilon > 0$,能否找到一个与 x 无关的N,只要 $n > N$,对$(0,1)$中任意的 x 都有 $x^n < \varepsilon$ 呢? 容易知道,这样的 N 是不存在的.因为如果存在 n_0,使得不等式

$$x^{n_0} < \varepsilon$$

对$(0,1)$中所有的 x 都成立,那么取 $x = (\varepsilon)^{\frac{1}{n_0}}$,便得到 $\varepsilon < \varepsilon$ 的矛盾.实际上在(1)中让 $x \to 1$,就得 $N(x,\varepsilon) \to +\infty$,这也说明不存在与 x 无关的N.

但是下面这个例子就不一样了.命

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x}, n = 1,2,\cdots.$$

对于$(0,1)$中任意 x 都有 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.由于

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n+x} < \frac{1}{n}$$

对$(0,1)$中一切 x 成立.因此,对任意 $\varepsilon \in (0,1)$,只要取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n > N$ 时,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

对$(0,1)$中所有的 x 都成立.显然这时的 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$与 x 无关.

以上两例,同样都在$(0,1)$上收敛,然而却有似乎很微小但又是非常重要的差别:在给定正数 ε 以后,前者对于每一个 $x \in (0,1)$,都有相应的 $N(x,\varepsilon)$,但却找不到一个与 x 无关的N;后者则有这样的 N.因此后者比前者多满足了一个条件——存在与 x 无关的N.这个条件对于上节提出的三个命题的成立具有

实质性的作用.所以有必要在原来的收敛概念的基础上建立一个更强的收敛概念.

定义 10.1 设函数列$\{f_n\}$在点集 I(可以是区间,也可以不是区间)上收敛于 f.如果对任意给定的正数 ε,都有与 x 无关的正整数$N(\varepsilon)$存在,使得当 $n>N(\varepsilon)$时,不等式

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对 I 中一切 x 都成立,就说函数列$\{f_n\}$在 I 上**一致收敛**于函数 f.

根据这个定义,函数列$\{x^n\}$在$(0,1)$上不一致收敛于 0,而函数列$\left\{\frac{1}{n+x}\right\}$则在$(0,1)$上一致收敛于 0.

从几何上来看,$y=f_n(x)(n=1,2,\cdots)$表示一系列曲线.所谓$\{f_n\}$一致收敛于 f,就是从某个足标 $N(\varepsilon)$之后,所有的曲线

$$y=f_n(x),n=N+1,N+2,\cdots$$

全部落入条形区域 $f(x)-\varepsilon<y<f(x)+\varepsilon$(图 10-1)之中.

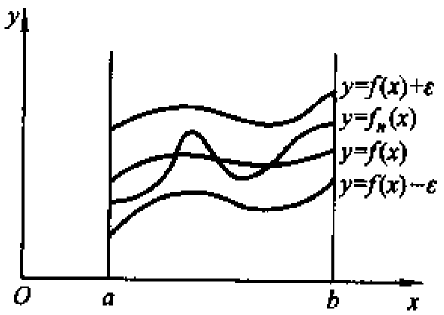

图 10-1

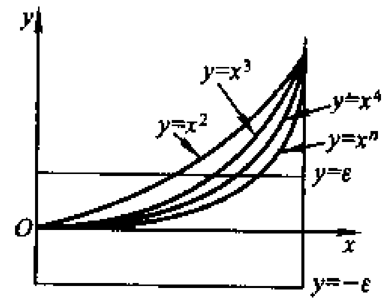

图 10-2

从图 10-2 可以看出,不论 n 多大,曲线 $y=x^n$ 永远不会全部落入条形区域 $0<y<\varepsilon$ 之中,这里 $\varepsilon\in(0,1)$.因而$\{x^n\}$在$(0,1)$上不是一致收敛于 0 的.

如果记

$$\beta_n=\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|,$$

那么从上面的几何考察,可以得到

定理 10.1 函数列$\{f_n\}$在 I 上一致收敛于f 的一个充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=0. \tag{2}$$

证明 如果$\{f_n\}$在 I 上一致收敛于f,那么对任意 $\varepsilon>0$,存在正整数$N(\varepsilon)$,当 $n>N(\varepsilon)$时,$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 对任意 $x\in I$ 都成立.由此即得

$$\beta_n=\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

这就是(2).反之,如果(2)成立,那么对任意 $\varepsilon>0$,存在 $N(\varepsilon)$,当 $n>N(\varepsilon)$时,$\beta_n<\varepsilon$.于是对任意 $x\in I$,便有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\beta_n<\varepsilon.$$

即$\{f_n\}$在 I 上一致收敛于f. □

例 1 讨论函数列 $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$在区间$(0,1)$和$(1,+\infty)$上的一致收敛性.

解 对任意给定的 x,$f_n(x)\to0(n\to\infty)$.当 $1<x<+\infty$时,

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{nx}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{nx}{n^2x^2}=\frac{1}{nx}<\frac{1}{n}.$$

故

$$\beta_n=\sup_{1<x<+\infty}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{n}\to0,\ n\to\infty.$$

由定理 10.1 知$\{f_n\}$在$(1,+\infty)$上一致收敛于 0.

当 $0<x<1$ 时,由于

$$\beta_n\geqslant\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{2},$$

所以 $\beta_n\not\to0$.故由定理 10.1 知$\{f_n\}$在$(0,1)$上不一致收敛于 0. □

从这个例子看出,用定理 10.1 来证明函数列非一致收敛比较方便.

例 2 讨论函数列

$$f_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2},\ n=1,2,\cdots$$

在$[0,1]$上的一致收敛性.

解 这就是§10.1 中的例 3.已知它在$[0,1]$上收敛于 $f(x)=0$.由于

$$\beta_n\geqslant\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=2ne^{-1}\not\to0,$$

所以这个函数列在$[0,1]$上非一致收敛. □

像数列的 Cauchy 收敛原理一样,也有判断函数列是否一致收敛的 Cauchy 原理,它的好处是无需知道极限函数,就能判别它是否一致收敛.

定理 10.2(Cauchy 收敛原理) 设$\{f_n\}$是定义在区间 I 上的一个函数列,那么$\{f_n\}$在 I 上一致收敛的充分必要条件是对任意$\varepsilon>0$,存在正整数 $N(\varepsilon)$,当 $n>N(\varepsilon)$时,

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon \tag{3}$$

对任意 $x\in I$ 及任意正整数 p 成立.

证明 设$\{f_n\}$在 I 上一致收敛于f,那么对任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N(\varepsilon)$,当 $n>N(\varepsilon)$时,

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f_{n+p}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对任意 $x\in I$ 及任意正整数 p 成立.因而

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\leqslant|f_{n+p}(x)-f(x)|+|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对任意 $x\in I$ 及 $p=1,2,\cdots$都成立.这就证明了条件的必要性.

再证条件的充分性.如果(3)成立,根据数列的 Cauchy 收敛原理,$\{f_n(x)\}$ 在 I 上每点 x 都收敛,设其极限函数为 $f(x)$.当 $n>N(\varepsilon)$固定时,(3)对每个 $p=1,2,\cdots$都成立.今在(3)中让 $p\to\infty$,即得

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon$$

对任意 $x\in I$ 成立.根据定义 10.1,$\{f_n\}$在 I 上一致收敛于 f. □

弄清了函数列一致收敛的概念后,就可很容易地讨论函数项级数的一致收敛概念了.

定义 10.2 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$是定义在区间 I 上的一个函数项级数,$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$记它的部分和.如果函数列$\{S_n(x)\}$在 I 上一致收敛于 $S(x)$,就说级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在 I 上一致收敛于$S(x)$.

利用函数列的 Cauchy 收敛原理,即可得到函数项级数的 Cauchy 收敛函数原理.

定理 10.3(Cauchy 收敛原理) 定义在区间 I 上的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的一个充分必要的条件是:对任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N(\varepsilon)$,当 $n>N(\varepsilon)$时,不等式

$$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon$$

对任意 $x\in I$ 及任意正整数 p 成立.

在上面的定理中取 $p=1$,就得到函数项级数一致收敛的一个必要条件:

推论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在 I 上一致收敛的一个必要条件是它的通项 $u_n(x)$在 I 上一致收敛于 0.

这个必要条件经常用来判断函数项级数的非一致收敛性.

例 3 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$在$(0,+\infty)$上的一致收敛性.

解 这个级数的通项 $u_n(x)=ne^{-nx}$.由于

$$\beta_n=\sup_{0<x<\infty}u_n(x)\geqslant u_n\left(\frac{1}{n}\right)=ne^{-1}\not\to0,$$

故$\{u_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上不一致收敛于 0,所以由定理 10.3 的推论知道,该级数在$(0,+\infty)$上不一致收敛. □

下面的 Weierstrass 判别法是判断级数一致收敛的最常用的方法.

定理 10.4(Weierstrass 判别法)　如果存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,使得在区间 I 上有不等式

$$|u_n(x)| \leqslant a_n, n=1,2,\cdots, \tag{4}$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间 I 上一致收敛.

证明　因为正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,由 Cauchy 收敛原理,对于任给的 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n>N$ 时,

$$a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}<\varepsilon$$

对任意正整数 p 成立.由(4)知道,当 $n>N$ 时

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

对任意正整数 p 及 I 中一切 x 成立,因而由定理 10.3 知,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在 I 上一致收敛. □

满足条件(4)的数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间 I 上的一个**优级数**,定理 10.4 是说:在区间 I 上有收敛的优级数的函数项级数必在 I 上一致收敛.

例 4　级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.这是因为在$(-\infty,+\infty)$上有不等式

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}, n=1,2,\cdots.$$

即该级数在$(-\infty,+\infty)$上有收敛的优级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,因而在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛. □

例 5　级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.这是因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$时有不等式

$$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2n^2}, n=1,2,\cdots. \quad \square$$

例 6 例 3 已经证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛，但它在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛，这里 δ 是任意一个正数. 事实上，由于 $x\geqslant\delta>0$，故当 n 充分大时有

$$n\mathrm{e}^{-nx}\leqslant n\mathrm{e}^{-n\delta}\leqslant\frac{1}{n^2},n>N.$$

故级数在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛. □

Weierstrass 判别法用起来很方便，但条件太强，它要求 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 绝对收敛，而且 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 一致收敛才行. 实际上存在这样的级数，它一致收敛，但却不绝对收敛（见例 7）；还可能有这样的情形，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 绝对且一致收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 却不一致收敛（见练习题 10.2 的第 5 题）. 对于这种级数，Weierstrass 判别法就无效了. 因此还需要研究更精细的判别法.

对于函数项级数也有类似于数项级数的 Dirichlet 和 Abel 判别法. 为此我们要引进函数列在区间上一致有界的概念.

设 $\{a_n\}$ 是一数列，这数列有界是指：存在正数 M，使得 $|a_n|\leqslant M$ 时对 $n=1,2,\cdots$ 都能成立. 设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 I 上的函数列，如果对于每一个 $x\in I$，都有正数 $M(x)$，使得 $|f_n(x)|\leqslant M(x)$ 对 $n=1,2,\cdots$ 成立，我们称函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上**逐点有界**. 应当注意，这里的 $M(x)$ 是随 x 而变化的. 如果我们能找到一个常数 M，使得

$$|f_n(x)|\leqslant M,n=1,2,\cdots$$

对一切 $x\in I$ 成立，就称函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上**一致有界**.

比较一下下面两个例子对我们会有帮助. 取 $I=(0,1)$，$f_n(x)=x^n$，$n=1,2,\cdots$. 由于

$$0<f_n(x)=x^n<1,n=1,2,\cdots$$

对一切 $x\in(0,1)$ 成立，所以函数数列 $\{x^n\}$ 在 $(0,1)$ 上一致有界.

在 $(0,1)$ 上讨论函数列 $\{nx^n\}$. 由于当 $x\in(0,1)$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} nx^n=0$，因此函数列 $\{nx^n\}$ 在 $(0,1)$ 上逐点有界，但是它不是一致有界的. 若不然，那就存在常数 $M>0$，使得

$$0<nx^n\leqslant M,n=1,2,\cdots$$

对一切 $x\in(0,1)$ 成立. 任意固定 n，在上式两边命 $x\to1-$，即得 $n<M$，这说明 n 不能是任意的正整数. 这一矛盾表明 $\{nx^n\}$ 在 $(0,1)$ 上不是一致有界的.

下面是关于函数项级数的 Dirchlet 和 Abel 判别法.

定理 10.5(Dirichlet 判别法) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$满足下面两个条件:

1° $\{b_n(x)\}$对于每个固定的 x 都单调,且在区间 I 上一致收敛于 0;

2° 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$的部分和在 I 上一致有界,即

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leqslant M, x \in I, n = 1,2,\cdots;$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$在 I 上一致收敛.

证明 和数项级数一样,我们用 Cauchy 收敛原理来证明它一致收敛. 从条件 2°知道,当 $n+1 \leqslant m \leqslant n+p$ 时,有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k(x)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{m} a_k(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{m} a_k(x)\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \\ &\leqslant 2M.\end{aligned}$$

于是由 Abel 引理可得

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant 2M(|b_{n+1}(x)| + 2|b_{n+p}(x)|).$$

因为 $\{b_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 0, 故对任何 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 $N(\varepsilon)$, 当 $n > N(\varepsilon)$时, 对任意 $x \in I$, 都有

$$|b_n(x)| < \frac{\varepsilon}{8M}.$$

于是, 当 $n > N(\varepsilon)$时便有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| < \varepsilon$$

对任意 $x \in I$ 及任意自然数 p 成立. 根据 Cauchy 收敛原理, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛. □

定理 10.6(Abel 判别法) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 满足下面两个条件:

1° $\{b_n(x)\}$对于每个固定的 x 都是单调的, 并且在 I 上一致有界, 即

$$|b_n(x)| \leqslant M, x \in I, n = 1,2,\cdots;$$

2° 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛;

那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

证明 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 I 上一致收敛,所以对任意 $\varepsilon>0$,存在自然数 $N(\varepsilon)$,当 $n>N(\varepsilon)$时,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3M}$$

对任意 $x\in I$ 及正整数 p 成立.于是由 Abel 引理即得

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k(x)b_k(x)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{3M}(|b_{n+1}(x)|+2|b_{n+p}(x)|)<\varepsilon$$

对任意 $x\in I$ 及任意正整数 p 成立.因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

□

我们记得,数项级数的 Abel 判别法(定理 9.21)是用 Dirichlet 判别法来证明的,请读者想一想,这里为什么不能这样做?

例 7 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$在$[\delta,2\pi-\delta]$$(0<\delta<\pi)$上一致收敛.

证明 命 $a_n(x)=\cos nx$,$b_n(x)=\frac{1}{n}$,则 $b_n(x)$递减趋于 0,而且

$$\left|\sum_{k=1}^{N}\cos kx\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}.$$

由于 $x\in[\delta,2\pi-\delta]$,所以 $\sin\frac{x}{2}\geqslant\sin\frac{\delta}{2}$,因而有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

即 $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx$ 在$[\delta,2\pi-\delta]$上一致有界.故由 Dirichlet 判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 在$[\delta,2\pi-\delta]$上一致收敛.级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$的一致收敛性的证明是一样的.

容易证明,这两个级数在$(0,\pi)$中不是绝对收敛的.这说明一致收敛的级数未必绝对收敛. □

下面的例子有一定的难度,但这种证明方法很值得学习.

例 8 设$\{a_n\}$是递减的正数列,证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx \tag{5}$$

在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$$

证明　先证条件的必要性.设(5)在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛,那么对任何$\varepsilon>0$,存在N,当$m>n>N$时,有

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k \sin kx\right| < \varepsilon$$

对任意x成立.今取$m>2N$,$n=\left[\frac{m}{2}+1\right]$,则$n\leqslant\frac{m}{2}+1<n+1$,即$n>\frac{m}{2}>N$.再取$x=\frac{\pi}{2m}$,于是有

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k \sin k\,\frac{\pi}{2m}\right| < \varepsilon. \tag{6}$$

当$n\leqslant k\leqslant m$时,$\frac{\pi}{4}<\frac{n}{m}\,\frac{\pi}{2}\leqslant k\,\frac{\pi}{2m}\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以

$$\sin k\,\frac{\pi}{2m}\geqslant\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

于是从(6)可得

$$\begin{aligned}\varepsilon &> \sum_{k=n}^{m} a_k \sin k\,\frac{\pi}{2m}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=n}^{m} a_k\\ &\geqslant(m-n+1)a_m\frac{\sqrt{2}}{2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{4}ma_m.\end{aligned}$$

这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$.

再证充分性.设$\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$.命

$$\mu_n=\sup_{m\geqslant n}\{ma_m\},$$

则$\{\mu_n\}$递减地趋于0.对于$m\geqslant n$,记

$$S_{n,m}(x)=\sum_{k=n}^{m} a_k \sin kx,$$

我们证明对任意实数x,均有

$$|S_{n,m}(x)|\leqslant(\pi+3)\mu_n. \tag{7}$$

由于$S_{n,m}(x)$是周期为2π的奇函数,所以只需证明上面的不等式在$[0,\pi]$上成立就行了.把区间$[0,\pi]$分成$\left[0,\frac{\pi}{m}\right]$,$\left[\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{n}\right]$,$\left[\frac{\pi}{n},\pi\right]$三段,我们证明(7)在这三段上都成立.

1° $x\in\left[\frac{\pi}{n},\pi\right]$.根据§3.5例1中的不等式$\sin\theta\geqslant\frac{2}{\pi}\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$有

$$\left|\sum_{k=n}^{m}\sin kx\right| = \frac{\left|\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x\right|}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leqslant \frac{\pi}{x} \leqslant n.$$

由 Abel 引理(引理 9.3)即得

$$|S_{n,m}(x)| \leqslant n(a_n+2a_m) \leqslant 3na_n \leqslant 3\mu_n.$$

2° $x\in\left[0,\frac{\pi}{m}\right]$. 从 $\sin\theta\leqslant\theta$ 可得

$$|S_{n,m}(x)| = \sum_{k=n}^{m} a_k\sin kx \leqslant x\sum_{k=n}^{m} ka_k \leqslant x\sum_{k=n}^{m}\mu_k$$

$$\leqslant \frac{\pi}{m}(m-n+1)\mu_n \leqslant \pi\mu_n.$$

3° $x\in\left[\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{n}\right]$. 这时 $n\leqslant\frac{\pi}{x}\leqslant m$, 记 $l=\left[\frac{\pi}{x}\right]$. 于是

$$S_{n,m}(x) = \sum_{k=n}^{m} a_k\sin kx = \sum_{k=n}^{l} a_k\sin kx + \sum_{k=l+1}^{m} a_k\sin kx$$

$$= S_{n,l}(x) + S_{l+1,m}(x).$$

由 $l\leqslant\frac{\pi}{x}<l+1$, 得出 $x\leqslant\frac{\pi}{l}$, 故由 2°得

$$|S_{n,l}(x)| \leqslant \pi\mu_n.$$

因为 $\frac{\pi}{l+1}<x\leqslant\frac{\pi}{n}$, 且 $l+1>\frac{\pi}{x}\geqslant n$, 由 1°和 $\{\mu_n\}$ 的递减性, 即得

$$|S_{l+1,m}(x)| \leqslant 3\mu_{l+1} \leqslant 3\mu_n.$$

于是

$$|S_{n,m}(x)| \leqslant |S_{n,l}(x)| + |S_{l+1,m}(x)| \leqslant (\pi+3)\mu_n.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=0$, 即知(5)在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛. □

值得注意的是上面的结论对级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$$

不成立. 如果记 $a_n=\frac{1}{n\ln n}$, 那么 $\{a_n\}$ 是递减的正数列, 且 $na_n=\frac{1}{\ln n}\to 0$, 但级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\ln n}$$

在$(0,\pi]$中不是一致收敛的. 请读者给出这一结论的证明.

练习题 10.2

1. 研究下列函数列在指定区间上的一致收敛性：

(1) $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx}$,

(i) $0<x<+\infty$; (ii) $0<\lambda<x<+\infty$.

(2) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$,

(i) $0\leqslant x\leqslant 1-\lambda$; (ii) $1-\lambda\leqslant x\leqslant 1+\lambda$;

(iii) $1+\lambda\leqslant x<+\infty$，其中 $\lambda>0$.

(3) $f_n(x)=\mathrm{e}^{-(x-n)^2}$,

(i) $-l<x<l,l>0$; (ii) $-\infty<x<+\infty$.

2. 研究下列级数在指定区间上的一致收敛性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)},0<x<+\infty$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2},-\infty<x<+\infty$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n}),\frac{1}{3}\leqslant|x|\leqslant 3$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}},-\infty<x<+\infty$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right),-l<x<l,l>0$;

(6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x},0\leqslant x\leqslant 2\pi$;

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x},0<x<+\infty$.

3. 若级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $0\leqslant x<+\infty$ 上一致收敛.

4. 设 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数，如果级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(a)$ 和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(b)$ 绝对收敛，证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对并一致收敛.

5. 证明级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$$

在$[0,1]$上绝对并一致收敛，但 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$在$[0,1]$上并不一致收敛.

6. 设在区间$[0,1]$上定义

$$u_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{1}{n},\\ 0, & x\neq\dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛，但它不存在收敛的优级数.

7. 设$\{u_n(x)\}$是$[a,b]$中的连续函数数列，如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$中每点收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(b)$发散，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$中不一致收敛.

8. 证明级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n\ln x}$在$(0,\pi]$中不一致收敛.

9. $[a,b]$是一个有限闭区间. 如果对任一点 $x\in[a,b]$，存在一个包含 x 的开区间 I_x，使得$\{f_n\}$在 I_x 上一致收敛于f. 求证：$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于 f.（提示：用有限覆盖定理.）

问题 10.2

1. 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$$

在区间$[0,\lambda]$和$[\lambda,+\infty)$上的一致收敛性，其中 $\lambda>0$.

2. 证明函数列

$$f_n(x)=xn^{-x}(\ln n)^{\alpha}$$

在$[0,+\infty)$上一致收敛的充分必要条件是 $\alpha<1$.

3. 设 f_1 在$[a,b]$上 Riemann 可积，定义

$$f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(x)\mathrm{d}t,\ n=1,2,\cdots,$$

证明函数列$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于 0.

4. 设函数列$\{f_n\}$和$\{g_n\}$在区间 I 上一致收敛，如果对每个 $n=1,2,\cdots,f_n$ 和 g_n

都是 I 上的有界函数(不要求一致有界)，那么 $\{f_n g_n\}$ 在 I 上必一致收敛.

5. 如果去掉上题中 f_n 或 g_n 有界的条件，结论是否还成立，试举例说明之.

6. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛，如果存在常数 M，使得对任意 $x\in[a,b]$ 及一切自然数 n 都有 $\left|\sum_{k=1}^{n} u_k'(x)\right|\leqslant M$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

7. 设函数 f 在 $x=0$ 的邻域里有二阶连续导函数，且 $f(0)=0, 0<f'(0)<1$. 如果记 f_n 是 f 的 n 次复合，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $x=0$ 的邻域里一致收敛.

8. 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}\cos nx$$

在 $(0,1]$ 中一致收敛.

§10.3　极限函数与和函数的性质

现在回过头来研究 §10.1 中提出的三个问题. 我们将看到，只要加上一致收敛的条件，那里所提问题的答案都是肯定的.

定理 10.7　如果函数列 $\{f_n\}$ 的每一项都在区间 I 上连续，且 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于函数 f，那么 f 也在 I 上连续.

证明　我们证明 f 在 I 上的任一点 x_0 处连续. 由于 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于 f，故对任给的 $\varepsilon>0$，可取一充分大的正整数 n_0，使得

$$|f_{n_0}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

对 I 上一切 x 都成立. 由于 f_{n_0} 是 I 上的连续函数，因而在 x_0 处连续，故存在 $\delta>0$，当 $x\in I$ 且 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 于是当 $x\in I$ 且 $|x-x_0|<\delta$ 时，便有

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| &\leqslant |f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)| \\ &\quad +|f_{n_0}(x)-f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了 f 在 x_0 处连续. 由于 x_0 是 I 的任意点，所以 f 在 I 上连续.　□

对应于无穷级数,我们有

定理 10.7′ 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$,且每项 $u_n(x)$ 都在 I 上连续,那么和函数 $S(x)$ 也在 I 上连续.

例 1 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛,因此它的和函数是整个数轴上的连续函数. □

例 2 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$,计算 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

解 在区间 $[-2,2]$ 上考察这个函数.由于

$$\left|\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

故由 Weierstrass 判别法知原级数在 $[-2,2]$ 上一致收敛,所以 f 是 $[-2,2]$ 上的连续函数.于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cos n\pi\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$ □

例 3 证明 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$ 是 $(0,+\infty)$ 上的连续函数.

证明 § 10.2 的例 3 已经证明这级数在 $(0,+\infty)$ 上不是一致收敛的,因而不能直接用定理 10.7′来证明 f 在 $(0,+\infty)$ 上的连续性.但可以这样做:设 x_0 是 $(0,+\infty)$ 中任一点,这时总能取 δ,使得 $0<\delta<x_0$.由 § 10.2 的例 6 知道,该级数在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛,因而 f 在 x_0 处连续.由于 x_0 是 $(0,+\infty)$ 中任一点,所以 f 在 $(0,+\infty)$ 上连续. □

例 4 证明 $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x}{\ln n}\right)^n$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数.

证明 容易证明上述级数在 $(-\infty,+\infty)$ 中不是一致收敛的,因而不能直接用定理 10.7′来证明 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.但对任意正数 M,当 $|x|\leqslant M$ 时,有

$$\left(\frac{|x|}{\ln n}\right)^n\leqslant\left(\frac{M}{\ln n}\right)^n$$

由 Cauchy 判别法,$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{M}{\ln n}\right)^n<+\infty$.故由 Weierstrass 判别法,$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x}{\ln n}\right)^n$ 在 $|x|\leqslant M$ 中一致收敛,因而 f 是 $[-M,M]$ 上的连续函数,由于 M 是任意的正数,所以 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. □

定理10.7′告诉我们,如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项 $u_n(x)$ 都在区间 I 上连续,那么加上一致收敛的条件后就能保证它的和函数 S 也在 I 上连续.现在反过来问,在每个 $u_n(x)$ 都连续的前提下,从和函数 S 的连续性能否推出级数在 I 上一致收敛?一般来说,答案是否定的.但如果考虑的是正项级数,而且 I 是有界的闭区间,答案则是肯定的.

先考虑函数列的情形.

定理10.8(Dini)　设函数列 $\{f_n\}$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续,如果对每一个 $x\in[a,b]$,数列 $\{f_n(x)\}$ 递减地趋向于0,那么这种收敛在 $[a,b]$ 上是一致的.

证明　对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N_x=N(\varepsilon,x)$,使得

$$0\leqslant f_{N_x}(x)<\varepsilon.$$

由于 f_{N_x} 在点 x 连续,必存在 $\delta_x>0$,使得当 $t\in[a,b]$ 且 $t\in(x-\delta_x,x+\delta_x)$ 时仍有

$$0\leqslant f_{N_x}(t)<\varepsilon. \tag{1}$$

于是这些区间的并

$$\bigcup_{x\in[a,b]}(x-\delta_x,x+\delta_x)$$

构成 $[a,b]$ 的一个开覆盖.由有限覆盖定理知道,从中可以选出有限个开区间

$$(x_i-\delta_{x_i},x_i+\delta_{x_i}),\ i=1,\cdots,m,$$

它们仍构成 $[a,b]$ 的一个开覆盖.命

$$N=\max(N_{x_1},\cdots,N_{x_m}).$$

由(1)和 $\{f_n\}$ 的递减性知道,当 $n\geqslant N$ 时,不等式

$$0\leqslant f_n(x)<\varepsilon$$

对一切 $x\in[a,b]$ 成立.这正说明 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上一致地成立.　□

下面是级数形式的Dini定理.

定理10.8′(Dini)　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续且非负,如果它的和函数 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续,那么该级数在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证明　记 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, $f_n(x)=S(x)-S_n(x)$,那么 $\{f_n\}$ 是 $[a,b]$ 上连续且递减地趋于0的函数列.由定理10.8知 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致地趋于0,即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.　□

注意，如果把定理中的闭区间$[a,b]$换成开区间或无穷区间，结论就可能不成立.例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的每一项 x^n 在区间$[0,1)$上非负且连续，它的和函数 $\frac{1}{1-x}$ 也在$[0,1)$上连续，但该级数在$[0,1)$上并不一致收敛.对于无穷区间，由例4知道，它的每一项在$[0,+\infty)$是非负的，和函数在$[0,\infty)$上连续，但它在$[0,\infty)$上不一致收敛，这是因为

$$\beta_n=\sup_{x\in[0,\infty)}\left(\frac{x}{\ln n}\right)^n\geqslant\left(\frac{n}{\ln n}\right)^n\to+\infty.$$

现在讨论级数的逐项积分问题.先看函数列的情形.

定理 10.9 如果$[a,b]$上的可积函数列$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于 f，那么 f 也在$[a,b]$上可积，而且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

证明 先证 f 在$[a,b]$上可积.用 $D(f)$和 $D(f_n)$分别记 f 和 f_n 在$[a,b]$上的不连续点的全体.由于 f_n 在$[a,b]$上可积，由 Lebesgue 定理(定理 7.17)，$D(f_n)$是一个零测集.由于$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于 f，故存在自然数 n_0，使得

$$|f(x)-f_{n_0}(x)|\leqslant 1$$

对所有 $x\in[a,b]$成立.因为 f_{n_0} 是有界函数，不妨设$|f_{n_0}(x)|\leqslant M$，于是有

$$|f(x)|\leqslant|f_{n_0}(x)|+1\leqslant M+1,$$

即 f 是$[a,b]$上的有界函数.今设 $x_0\in D(f)$，则 x_0 必是某个 f_n 的不连续点.不然的话，x_0 是所有 f_n 的连续点，于是由定理 10.7，x_0 也必是 f 的连续点，这与假设相违背.因而有

$$D(f)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}D(f_n).$$

由于每个 $D(f_n)$都是零测集，所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty}D(f_n)$也是零测集，因而 $D(f)$是零测集.由 Lebesgue 定理即知 f 在$[a,b]$上 Riemann 可积.

现在来证明等式(2).由于$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于 f，故对任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N(\varepsilon)$，当 $n>N(\varepsilon)$时，$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 对$[a,b]$中所有的 x 成立.于是当 $n>N(\varepsilon)$时，有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|&\leqslant\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x\\&<\varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

这就证明了等式(2)成立. □

注意：如果$\{f_n\}$不是一致收敛到 f，那么 f 可能在$[a,b]$上不可积. §10.1 的例 2 就是这样的例子.

由于$[a,b]$上的连续函数是可积的，故从定理 10.9 立刻可得

推论 1　如果$[a,b]$上的连续函数列$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛到 f，那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

对于无穷级数有相应的结果.

定理 10.9′　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于 $S(x)$，且每项 $u_n(x)$都在$[a,b]$上可积，那么 $S(x)$也在$[a,b]$上可积，而且

$$\int_a^b\Big(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\Big)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

推论 1′　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛，且每项 $u_n(x)$都在$[a,b]$上连续，那么

$$\int_a^b\Big(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\Big)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

例 5　设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$，计算 $\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

解　因为级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，故在任意有限区间内能逐项积分. 于是

$$\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}\mathrm{d}x=0.\quad\square$$

现在来讨论函数列的逐项微分的问题. 从 §10.1 的例 4 可以看出$\{f_n\}$一致收敛于 f 并不能导出$\{f_n'\}$收敛于 f'，而是应该要求$\{f_n'\}$一致收敛. 这就是下面的

定理 10.10　如果函数列$\{f_n\}$满足条件：

1° 每一个 f_n 在$[a,b]$上有连续的导函数；

2° 由导函数构成的函数列$\{f_n'\}$在$[a,b]$上一致收敛于函数 g；

3° 至少在某一点 $x_0\in[a,b]$收敛；

那么函数列$\{f_n\}$在闭区间$[a,b]$上一致收敛于某个连续可微函数 f，而且对每个 $x\in[a,b]$有

$$f'(x)=g(x),$$

即

$$\big(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\big)'=\lim_{n\to\infty}f_n'(x).$$

证明 因为$\{f_n\}$在$x_0\in[a,b]$处收敛，由 Cauchy 收敛原理，对任意$\varepsilon>0$，存在N_1，当$n,m>N_1$时，有不等式

$$|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

又因为$\{f_n'\}$在$[a,b]$上一致收敛，仍由 Cauchy 收敛原理，存在N_2，当$m,n>N_2$时，不等式

$$|f_n'(x)-f_m'(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{4}$$

对每一个$x\in[a,b]$成立．命$N=\max(N_1,N_2)$，则当$m,n>N$时，(3)，(4)两式都成立．由 Newton - Leibniz 公式，对于任意$x\in[a,b]$有

$$f_n(x)=f_n(x_0)+\int_{x_0}^{x}f_n'(t)\mathrm{d}t, \tag{5}$$

$$f_m(x)=f_m(x_0)+\int_{x_0}^{x}f_m'(t)\mathrm{d}t.$$

因而当$m,n>N$时有

$$\begin{aligned}|f_m(x)-f_n(x)|&\leqslant|f_m(x_0)-f_n(x_0)|\\&\quad+\left|\int_{x_0}^{x}(f_m'(t)-f_n'(t))\mathrm{d}t\right|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}|x-x_0|<\varepsilon.\end{aligned}$$

根据 Cauchy 收敛原理，$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛．设其极限函数为f．由于$\{f_n'\}$在$[a,b]$上一致收敛于g，根据定理 10.9 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f_n'(t)\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x}g(t)\mathrm{d}t.$$

在(5)两边取$n\to\infty$的极限，便得

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}g(t)\mathrm{d}t.$$

由此即得

$$f'(x)=g(x).\quad\square$$

关于函数项级数，相应的定理是

定理 10.10′ 如果函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$满足条件：

1° 每一项$u_n(x)$在$[a,b]$上有连续的导函数；

2° 由各项的导函数组成的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$在$[a,b]$上一致收敛于函数$g(x)$；

3° 至少在某一点 $x_0\in[a,b]$上收敛，

那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛，其和函数 $S(x)$在$[a,b]$上连续可导，而且 $S'(x)=g(x)$，即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$$

例 6　证明 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^4}$在$(-\infty,+\infty)$上有二阶连续导函数，并且计算 $f''(x)$.

解　容易看出，原级数以及每项求导后所得的级数都在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，因而有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}.$$

对这个级数再逐项求导所得的级数仍在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，因而有

$$f''(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}.\quad\square$$

由于积分运算和微分运算都是某种极限运算，所以上面这些定理实质上都是断言，在一定的条件下，两种极限运算交换的合理性. 例如，定理 10.7 的结论可以写成：

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x);$$

定理 10.9 的结论可以写成：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x;$$

定理 10.10 的结论可以写成：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_n(x))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\lim_{n\to\infty}f_n(x)).$$

这里起关键作用的是函数列的一致收敛性. 在下面的几章中，极限运算交换的合理性仍然是我们讨论的焦点.

从历史上来看，本节介绍的一些结果对当时的数学家也不是一下子都明白的. 19 世纪的大数学家 Cauchy 在他的《分析教程》中曾断言：收敛的连续函数项级数的和函数也是连续的. 后来 Abel 在他的一篇关于二项式级数的长文章中指出了他的错误. Abel 举出下面的例子：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2},0<x<2\pi.\tag{6}$$

由于正弦函数 $\sin x$ 以 2π 为周期，所以上面级数的和函数如图 10－3 所示. 它在 2π 的整数倍的点上都不连续，但级数在整个数轴上都收敛，它的每一项$\dfrac{\sin nx}{n}$

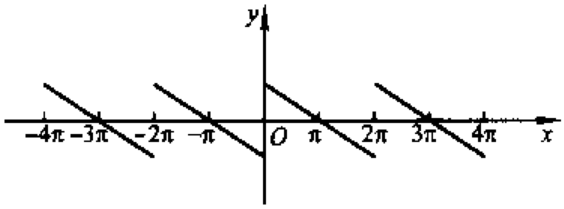

图 10－3

也都在整个数轴上连续.发生这一现象的根本原因是上面的级数在 2π 的整数倍的点的附近是不一致收敛的.可见一致收敛的概念在级数理论中是何等重要!等式(6)的证明将在§12.2 中给出.

练习题 10.3

1．确定下列函数的存在域,并研究它们的连续性:

(1) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$;

(2) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x+(-1)^{n}n}{x^{2}+n^{2}}$.

2．证明函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{4}}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 中有二阶连续导函数,并计算 $f''(x)$.

3．证明 Riemann ζ 函数

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x}}$$

在 $(1,+\infty)$ 内是连续的,并在这区间内有各阶连续导函数.

4．设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}\,(x>0)$,计算 $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3}f(x)\mathrm{d}x$.

5．已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$,证明:

$$\lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{x}}=\ln 2.$$

6．证明:

$$\lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}(1-x)}{n(1-x^{2n})}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}.$$

问题10.3

1. 设 E 是 $(-\infty,+\infty)$ 中一个点集，x_0 是 E 的一个极限点（x_0 可以是 $\pm\infty$）. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 E 上一致收敛，而且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} u_n(x)=a_n,\ n=1,2,\cdots$. 证明：

   (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{1+2x}\right)^n\cos\dfrac{n\pi}{x}$，计算：

$$\lim_{x\to 1} f(x),\quad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

3. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛，如果

$$|S_n(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right|\leqslant M,a\leqslant x\leqslant b,n=1,2,\cdots,$$

就说 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上**有界收敛**.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界收敛，且对任意 $\delta>0$ 及 $c\in(a,b)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u(x)$ 在 $[a,c-\delta]$ 和 $[c+\delta,b]$ 上一致收敛. 如果 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上 **Riemann** 可积，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 也在 $[a,b]$ 上 **Riemann** 可积，而且

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

4. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 满足下列条件：

   (1) 反常积分 $\int_a^{+\infty} u_n(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$n=1,2,\cdots$；

   (2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛，这里 b 是大于 a 的任何实数；

   (3) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛，这里

$$f_n(x)=\int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t,$$

那么 $\int_a^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty}u_n(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，而且

$$\int_a^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty}u_n(x)\mathrm{d}x.$$

5. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 满足下列条件：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中收敛于 $f(x)$；

(2) 级数的每一项 $u_n(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微；

(3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0}$ 在 $0<|x-x_0|<\delta$ 中一致收敛，那么 f 在 x_0 处可微，而且

$$f'(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x_0).$$

6. 在(0,1)中任取一数列 $\{a_n\}$，其中两两不相同. 证明函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-a_n|}{2^n}$$

在(0,1)中连续，且在 $x=a_n(n=1,2,\cdots)$ 处都不可微，而在(0,1)中其他点处都可微.

7. 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{x+2^n}$，$x\in[0,+\infty)$. 证明

(i) f 在 $[0,+\infty)$ 上连续；

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$；

(iii) 对一切 $x\in(0,+\infty)$，有

$$0<f(x)-\frac{\ln(1+x)}{x\ln 2}<\frac{1}{1+x}.$$

8. 证明 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n!)^2 2^{n+1}}{(2n+1)!}=\pi$.

9. 构造一个可导函数，使它在有理点处取有理数值，它的导数在有理点处取无理数值.

§10.4　由幂级数确定的函数

本节要讨论一种特殊的函数项级数——**幂级数**. 幂级数的一般形状如下：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots, \qquad (1)$$

它的每一项都是幂函数.它是一种理论上简单、用起来方便的函数项级数.如果在(1)中命

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0,$$

那么级数(1)就退化为一个多项式.因此多项式可看作一种特殊的幂级数.反过来,幂级数也可看作一个"无穷次"的多项式.下面将看到,幂级数确有许多与多项式类似的性质.

为讨论简单起见,我们往往在(1)中命 $x_0=0$,只讨论形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (2)$$

的幂级数.一般的情形只需作变换 $y=x-x_0$ 就行.

我们首先关心的是(2)的收敛点集.和一般的函数项级数不同,幂级数的收敛点集一定是一个区间.我们先证明下面的

定理 10.11(Abel)　如果幂级数(2)在点 $x=x_0(x_0\neq 0)$ 处收敛,那么它必在区间 $|x|<|x_0|$ 中绝对收敛.如果(2)在点 $x=x_1$ 处发散,那么它必在 $|x|>|x_1|$ 发散.

证明　因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛,所以 $|a_n x_0^n| \leqslant M$, $n=1,2,\cdots$ 对于满足条件 $|x|<|x_0|$ 的 x 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < +\infty,$$

即(2)绝对收敛.如果对于满足条件 $|x|>|x_1|$ 的 x, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛,那么由刚才的结论, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 绝对收敛,这与假设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 发散相矛盾.　□

现在可以证明

定理 10.12　对于给定的幂级数(2),记

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

那么

1° 当 $R=0$ 时,(2)只在 $x=0$ 这一点收敛;

2° 当 $R=+\infty$ 时,(2)在整个数轴上都绝对收敛;

3° 当 $0<R<+\infty$ 时,(2)在区间 $(-R,R)$ 中绝对收敛,在 $[-R,R]$ 之外发

散.

证明 因为

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|}=\frac{|x|}{R},$$

根据数项级数的 Cauchy 判别法即得定理的 1°,2°与 3°的前半部分. 今在$[-R,R]$之外任取一点 x_0,则$|x_0|>R$,如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x_0^n$ 收敛,那么对任意满足条件$|x_0|>x_1>R$ 的 x_1,由定理 10.11, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x_1^n|<+\infty$. 但另一方面

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x_1^n|}=\frac{|x_1|}{R}=\frac{x_1}{R}>1,$$

由 Cauchy 判别法, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x_1^n|=+\infty$. 这个矛盾说明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x_0^n$ 发散. □

由此可见,幂级数(2)的收敛点集是区间$(-R,R)$,R 称为(2)的**收敛半径**,$(-R,R)$称为(2)的**收敛区间**. 这时幂级数(1)的收敛区间是(x_0-R,x_0+R). 定理 10.12 实际上给出了计算 R 的公式.

例 1 用定理 10.12 容易算出下列三个幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \sum_{n=1}^{\infty}n^n x^n$$

的收敛半径分别为 1, $+\infty$和 0. □

例 2 计算幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k x^{2k}$的收敛半径.

解 当 $n=2k$ 时,$a_n=2^k$;当 $n=2k+1$ 时,$a_n=0$. 于是

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[2k]{2^k}=\sqrt{2}.$$

所以 $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. □

必须指出,在幂级数的收敛区间$(-R,R)$的两个端点 $x=\pm R$ 处,级数的收敛性没有肯定的结论. 下面三个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

的收敛半径都是 1,收敛区间是$(-1,1)$. 但第一个级数在左端点 $x=-1$ 处条件收敛,在右端点 $x=1$ 处发散. 第二个级数在两个端点处都绝对收敛,第三个级数在两个端点处都发散.

设(2)的收敛半径为 R,它在区间$(-R,R)$内确定了一个和函数 $S(x)$. 为了研究 $S(x)$在$(-R,R)$内的性质,首先要知道(2)在它的收敛区间内是否一致

收敛.一般来说答案是否定的.例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在它的收敛区间$(-1,1)$中就不一致收敛.但我们有下面的

定理 10.13 设(2)的收敛半径为 R,则对任意 $r\in(0,R)$,级数(2)在$[-r,r]$中一致收敛.

证明很简单,因为当 $x\in[-r,r]$时,有

$$|a_nx^n|\leqslant|a_n|r^n,$$

而 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$ 收敛,故由 Weierstrass 判别法,$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在$[-r,r]$中一致收敛. □

幂级数的这一性质保证了它的和函数不仅在收敛区间内是连续的,而且具有任意阶导数.

定理 10.14 设(2)的收敛半径为 R,则其和函数 $S(x)$在$(-R,R)$中连续,而且在$(-R,R)$中有任意阶导数:

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k},k=1,2,\cdots. \tag{3}$$

证明 任取 $x_0\in(-R,R)$,取 r 使得$|x_0|<r<R$,于是 $x_0\in[-r,r]\subset(-R,R)$.由定理 10.13,(2)在$[-r,r]$中一致收敛,因而 $S(x)$在 x_0 处连续.由于 x_0 是$(-R,R)$中的任意点,所以 $S(x)$在$(-R,R)$中连续.

为了证明 $S(x)$在$(-R,R)$中可导,考虑把(2)逐项求导后所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}, \tag{4}$$

由于

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n|a_n|}&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\\&=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|},\end{aligned}$$

根据定理 10.12,(4)的收敛半径也是 R,因而(4)也在$[-r,r]$中一致收敛.于是对级数(2)而言,定理 10.10′的三个条件在闭区间$[-r,r]$上都成立,因而

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \tag{5}$$

在$[-r,r]$中成立.由于 r 可任意接近R,所以(5)在$(-R,R)$中成立.反复运用上面的推理,即知(3)在$(-R,R)$中成立. □

这条定理所揭示的正是幂级数和多项式的相似之处.

定理 10.15 设(2)的收敛半径为 R,$S(x)$是它的和函数,那么对于任意的 $x\in(-R,R)$有

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \tag{6}$$

而且(6)右端幂级数的收敛半径仍为 R.

证明 不妨设 $x>0$. 由于(2)在$[0,x]$上一致收敛,它在$[0,x]$上能逐项积分,因而有

$$\begin{aligned}\int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\Big)\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (a_n t^n)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.\end{aligned}$$

这就是(6). 再由定理 10.12,易知(6)右端级数的收敛半径也是 R. □

利用上面这些定理可以求出一些幂级数的和,还可把一些初等函数展开为幂级数.

例 3 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和.

解 容易知道这个幂级数的收敛半径 $R=1$. 为了求出它的和,对幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x|<1)$$

逐项求导,就有

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

因而

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x|<1). \quad \square$$

在上式中取 x 的一些特殊值,即可求得一些数项级数的和. 例如分别取 $x=\frac{1}{2},\frac{1}{3}$,就得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$

例 4 把 $\ln(1+x)$和 $\arctan x$ 展开成幂级数.

解 当 $x\in(-1,1)$时,有

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$$

由 0 到 x 逐项积分得

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \ -1<x<1.\end{aligned}$$

再逐项积分等式

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},$$

即得 arctan x 展开式：

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\ -1<x<1.\quad \square$$

在收敛区间的两端点，和函数有如下性质.

定理 10.16(Able 第二定理)　设(2)的收敛半径为 R，如果在 $x=R$ 处，级数(2)收敛，则其和函数 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续；如果(2)在 $x=-R$ 处收敛，则 $S(x)$ 在 $x=-R$ 处右连续.

证明　设(2)在 $x=R$ 处收敛，我们证明(2)必在 $[0,R]$ 上一致收敛. 事实上，把(2)写成

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n R^n\left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n R^n$ 收敛，数列 $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^n\right\}$ 对 $[0,R]$ 中的每个 x 而言是递减的，而且一致有界. 根据级数一致收敛的 Abel 判别法，(2)在 $[0,R]$ 上一致收敛. 所以 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续. 定理的另一半可同法证之.　$\square$

例 5　求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解　已知当 $x\in(-1,1)$ 时有等式

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

因为右端级数在 $x=1$ 处收敛，故由 Abel 第二定理得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\lim_{x\to 1-}\ln(1+x)=\ln 2.$$

利用例 4 的另一个展开式

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\ -1<x<1,$$

可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.\quad \square$$

再来看一个稍难的例子.

例 6　求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}$ 的和.

解　与例 5 类似，考虑幂级数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}x^{3n+1}.$$

容易知道，它的收敛半径是 1. 由于它在 $x=1$ 处收敛，故由 Abel 第二定理，它的和函数 $S(x)$ 在 $x=1$ 处左连续，因而有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}=\lim_{x\to1-}S(x).$$

由于 $S(0)=0, S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\frac{1}{1+x^3}$，所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}&=\lim_{x\to1-}S(x)=\lim_{x\to1}\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{2-t}{t^2+t+1}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{3}\left(\ln(1+t)\Big|_0^1\right.\\&\quad-\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)\Big|_0^1\\&\quad\left.+\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\Big|_0^1\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).\quad\square\end{aligned}$$

Abel 第二定理的逆定理是否成立？即若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1(这里我们设 $R=1$)，且 $\lim_{x\to1-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$ 存在，是否能断言 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$？很容易举出使上述结论不成立的例子. 例如幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$ 的收敛半径为 1，它在 $(-1,1)$ 中等于 $\frac{1}{1+x}$，因而

$$\lim_{x\to1-}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=\frac{1}{2}$$

存在，但级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 显然是发散的. 如果给系数 a_n 加上适当的条件，那么上面的逆定理也能成立.

定理 10.17(Tauber) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1，且 $\lim_{x\to1-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$ 存在，如果

$$a_n=o\left(\frac{1}{n}\right),$$

那么 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$.

证明　由假定, $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. 故若命

$$\delta_n = \sup_{k\geqslant n}\{|ka_k|\},$$

则当 $n\to\infty$ 时, δ_n 递减趋于 0. 命

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x\in[0,1)$$

对任何正整数 N 都有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} a_n - A &= \sum_{n=0}^{N} a_n - S(x) + S(x) - A \\ &= \sum_{n=1}^{N} a_n(1-x^n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n + (S(x)-A) \\ &= I_1(x) + I_2(x) + I_3(x). \end{aligned} \tag{7}$$

对于 $x\in[0,1)$, 我们有

$$\begin{aligned}|I_1(x)| &\leqslant (1-x)\sum_{n=1}^{N}|a_n|(1+x+\cdots+x^{n-1}) \\ &\leqslant (1-x)\sum_{n=1}^{N} n|a_n| \leqslant (1-x)N\delta_0, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}|I_2(x)| &\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty}|na_n|\frac{x^n}{n} \leqslant \frac{\delta_N}{N}\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \\ &= \frac{\delta_N}{N}\frac{x^{N+1}}{1-x} \leqslant \frac{\delta_N}{N(1-x)}. \end{aligned} \tag{9}$$

命 $x_N = 1 - \frac{\sqrt{\delta_N}}{N}$, 即 $N(1-x_N) = \sqrt{\delta_N}$. 易见当 $N\to\infty$ 时, $x_N\to 1$. 从(8)和(9)可得

$$|I_1(x_N)| \leqslant \delta_0\sqrt{\delta_N},$$

$$|I_2(x_N)| \leqslant \frac{\delta_N}{\sqrt{\delta_N}} = \sqrt{\delta_N},$$

$$I_3(x_N) = S(x_N) - A.$$

从(7)即得

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right| \leqslant (\delta_0 + 1)\sqrt{\delta_N} + |S(x_N) - A|. \tag{10}$$

让 $N\to\infty$, 由(10)即得 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$. □

另外一个简单的充分条件是只要 $a_n\geqslant 0$ 便能保证定理的结论成立(见问题

10.4 第 8 题).

最后来看两个幂级数如何相乘. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径都是 R, 那么当 $|x| < R$ 时, 这两个幂级数都绝对收敛, 它们的乘积就等于它们的 Cauchy 乘积:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}(a_l x^l)(b_{n-l}x^{n-l})$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{n} a_l b_{n-l}\right)x^n.$$

这样,我们已经证明了下面的

定理 10.18 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径都是 R, 那么当 $x \in (-R, R)$ 时有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

其中 $c_n = \sum\limits_{l=0}^{n} a_l b_{n-l}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

例 7 由于当 $|x| < 1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$, 故若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 1, 那么当 $|x| < 1$ 时便有

$$\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n,$$

这里 $S_n = \sum\limits_{l=0}^{n} a_l$. 类推下去, 便有

$$\frac{1}{(1-x)^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(S_0 + S_1 + \cdots + S_n)x^n,$$

等等. □

利用定理 10.18 和定理 10.16, 可得如下的关于数项级数乘法定理的一个补充.

定理 10.19 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 是两个收敛级数, 如果它们的 Cauchy 乘积 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 也收敛, 那么

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right). \tag{11}$$

证明 因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 是三个收敛级数, 所以, 由它们所产生

的三个幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

的收敛半径 R 都不小于 1.由定理 10.18,当 $x\in(-R,R)$时有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

在上式两端让 $x\to 1-$,根据 Abel 第二定理即得(11). □

练习题 10.4

1. 求下列幂级数的收敛半径,并研究它们在收敛区间端点的性质:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n, a>0, b>0$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n x^n$.

2. 求下列广义幂级数的收敛点集:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\mathrm{e}^{-nx}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n \sin\frac{\pi}{2^n}$.

3. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2.证明:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径 $R\geqslant\min(R_1,R_2)$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n b_n)x^n$ 的收敛半径 $R\geqslant R_1 R_2$;

(3) 举例说明在(1)中 $R>\min(R_1,R_2)$和在(2)中 $R>R_1R_2$ 的情形都是可能发生的.

4. 求下列级数在区间$(-1,1)$上的和:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$;　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

5. 证明下列等式在区间$(-1,1)$中成立：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n=\frac{2}{(1-x)^3}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}n^3x^n=\frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3!}(n+1)(n+2)(n+3)x^n=\frac{1}{(1-x)^4}$.

问题 10.4

1. 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 是一个发散的正项级数，如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_0+\cdots+a_n}=0$，那么级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径$R=1$. 试证之.

2. 设

$$l=\lim_{n\to\infty}\inf\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,\quad L=\lim_{n\to\infty}\sup\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为R，证明：

$$l\leqslant R\leqslant L.$$

3. 求级数$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\cdots$的和.

4. 证明：

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\cdots=\frac{1}{4\sqrt{2}}(\pi+2\ln(\sqrt{2}+1)).$$

5. 证明：

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

6. 证明：

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

7. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为R，且$a_n\geqslant 0$.

(1) 证明 $\lim_{x\to R-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$;

(2) 由(1)证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$.

8. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1,且 $\lim_{x\to1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$. 如果 $a_n\geqslant0$,那么 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$.

§10.5 函数的幂级数展开式

上面我们讨论了由幂级数所确定的和函数的性质. 这一节要讨论一个函数在什么条件下能展开成幂级数以及如何展开.

如果函数 f 在区间 (x_0-R,x_0+R) 中能展开成幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n.$$

根据定理 10.14, f 在 (x_0-R,x_0+R) 中有任意阶导数,这是 f 能展开成幂级数的必要条件. 其次,由于

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k},$$
$$k=1,2,\cdots,$$

命 $x=x_0$,就得

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},k=0,1,2,\cdots.$$

这就是说,如果 f 能展开为 $x-x_0$ 的幂级数,那么这个幂级数一定是下面这种形式:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

现在设 f 在 $x=x_0$ 处有任意阶导数,那么从 f 就能作出幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

称这个幂级数为 f 在 $x=x_0$ 处的 **Taylor 级数**,记为

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{1}$$

特别当 $x_0=0$ 时,级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

也称为 f 的 **Maclaurin 级数**.

只要 f 在 $x=x_0$ 处有任意阶导数,就能作出它的 Taylor 级数(1).但这个级数不一定是收敛的,即使收敛,也未必收敛到 $f(x)$ 自己.例如函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2^n x)}{n!},$$

这是一个由函数项级数确定的函数.利用定理 10.10′,不难证明它在 $(-\infty,+\infty)$ 上有任意阶导数.它在 $x_0=0$ 处的 Taylor 级数为

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{2^{2k+1}}}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

这个级数除 $x=0$ 外是处处发散的.

再如函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在§4.3 中我们证明过

$$f^{(n)}(0)=0,n=0,1,2,\cdots.$$

因而它的 Taylor 级数收敛于 0,而不收敛于 f 自己.

于是产生这样的问题,f 要满足什么条件,才能保证它的 Taylor 级数收敛于 f 自己? 即在什么条件下,等式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

成立.

设 f 在 (x_0-R,x_0+R) 上有任意阶导数.根据 Taylor 公式(定理 4.3),对 (x_0-R,x_0+R) 中的任一 x 有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$ 是余项,它有两种表示式:Lagrange 余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

和 Cauchy 余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n(x-x_0),$$

其中 ξ 和 η 是介于 x_0 和 x 之间的数.因此,f 能在 (x_0-R,x_0+R) 中展开为 Taylor 级数的充分必要条件是对任意 $x\in(x_0-R,x_0+R)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

下面的定理给出了一个 f 能在 (x_0-R,x_0+R) 上展开为 Taylor 级数的十分便于应用的充分条件.

定理 10.20　如果存在常数 M,使得对 (x_0-R,x_0+R) 中的所有 x 及一切充分大的正整数 n,均有

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M,$$

那么 f 能在 (x_0-R,x_0+R) 中展开为 Taylor 级数.

证明　只需证明在上述条件下有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,x\in(x_0-R,x_0+R).$$

事实上,利用 Lagrange 余项可得

$$\begin{aligned}|R_n(x)|&=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\\&\leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\leqslant M\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

由于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{R^n}{n!}$ 收敛,因而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}=0$,故得

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,x\in(x_0-R,x_0+R).\quad\square$$

例 1　求函数 e^x 的 Maclaurin 展开式.

解　因为 $(e^x)^{(n)}=e^x,n=0,1,2,\cdots$.故其 Maclaurin 级数为

$$e^x\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n.$$

我们证明对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,上式取等号成立.为此任取正数 R,当 $|x|<R$ 时,对一切自然数 n 均有

$$|(e^x)^{(n)}|=e^x<e^R.$$

根据定理 10.20,等式

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\tag{2}$$

在 $(-R,R)$ 中成立.由于 R 是任意的,故(2)在 $(-\infty,+\infty)$ 中成立.　$\square$

例 2　求函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的 Maclaurin 展开式.

解　因为

$$\begin{aligned}(\sin x)^{(n)}|_{x=0}&=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\Big|_{x=0}=\sin\frac{n\pi}{2}\\&=\begin{cases}0, & n=2k;\\(-1)^k, & n=2k+1.\end{cases}\end{aligned}$$

又因为

$$|(\sin x)^{(n)}|=\left|\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\leqslant 1, x\in(-\infty,+\infty).$$

根据定理 10.20 有

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}, -\infty<x<+\infty.$$

用同样的方法可得

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}, -\infty<x<+\infty. \quad \square$$

例 3 求函数 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 的 Maclaurin 展开式,其中 α 是任意实数.

解 §4.3 的例 6 已经证明,对任何 $x>-1$ 有

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k+R_n(x),$$

其中

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, \binom{\alpha}{0}=1,$$

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{\alpha-1}x^{n+1},$$

这里 $0<\theta<1$,并且对 $R_n(x)$ 已经得到如下的估计:

$$|R_n(x)|\leqslant\begin{cases}\dfrac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}(1+|x|)^{\alpha-1}|x|^{n+1}, & \alpha>1,\\ \dfrac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}(1-|x|)^{\alpha-1}|x|^{n+1}, & \alpha<1.\end{cases}$$

由于当 $|x|<1$ 时,级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1}<+\infty,$$

因而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n-1}=0$. 这就证明了

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0, |x|<1.$$

从而有展开式

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k, |x|<1. \tag{3}$$

上面的等式在 $x=\pm1$ 处是否成立? 分下面几种情形来讨论:

1° 若 $\alpha\leqslant-1$. 这时

$$\left|\binom{\alpha}{k}\right|=\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)|}{k!}\geqslant\frac{k!}{k!}=1,$$

所以当 $x=\pm1$ 时,(3)右端的级数发散.

2° 若 $-1<\alpha<0$. 当 $x=-1$ 时,

$$(-1)^k\binom{\alpha}{k}=\frac{-\alpha(-\alpha+1)\cdots(-\alpha+k-1)}{k!}$$
$$=\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+k-1)}{k!}$$
$$=\frac{|\alpha|}{k}\left(\frac{|\alpha|+1}{1}\right)\cdots\left(\frac{|\alpha|+k-1}{k-1}\right)\geqslant\frac{|\alpha|}{k},$$

所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(-1)^k$ 发散.

当 $x=1$ 时,这时级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}=1+\alpha+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}+\cdots$$

是一个交错级数.而且由于 $\frac{|\alpha-k|}{k+1}\leqslant\frac{|\alpha|+k}{k+1}<1$,

$$\left|\binom{\alpha}{k}\right|=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\right|$$
$$\geqslant\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\right|\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right|$$
$$=\left|\binom{\alpha}{k+1}\right|,$$

即 $\left\{\left|\binom{\alpha}{k}\right|\right\}$ 是一递减数列.再由§9.7的例7知道

$$\lim_{n\to\infty}\left|\binom{\alpha}{k}\right|=0.$$

故由 Leibniz 判别法即可断言 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}$ 收敛.

3° 若 $\alpha>0$. §9.3的例5已经用 Raabe 判别法证明了级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{k}\right|<+\infty$.因而级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k},\ \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(-1)^k$$

绝对收敛.

综上所述,根据 Abel 第二定理,(3)成立的范围是:当 $\alpha\leqslant-1$ 时,(3)只在 $(-1,1)$ 中成立;当 $-1<\alpha<0$ 时,(3)在 $(-1,1]$ 中成立;当 $\alpha>0$ 时,(3)在 $[-1,1]$ 上成立. □

定理 10.19 和 10.20 给出了把函数展开为幂级数的方法.除此之外,利用某些函数的已知展开式,通过幂级数的微分、积分以及代数运算也能作出其他一些

函数的幂级数展开式. § 10.4 的例 4 通过幂级数的逐项积分求得了函数 $\ln(1+x)$和 $\arctan x$ 的幂级数展开式. 下面再看两个这样的例子

例 4 求函数$\dfrac{1}{(1-x)(2-x)}$的 Maclaurin 展开式.

解 易知

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}.$$

而

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ -1<x<1,$$

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n,\ -2<x<2.$$

因而当 $-1<x<1$ 时,有

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n.\quad \square$$

例 5 把函数$\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$展开为 Maclaurin 级数.

解 已知

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\ -1\leqslant x<1.$$

由 § 10.4 的例 6 立刻可得

$$\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n,\ -1<x<1.\quad \square$$

例 6 把函数 $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$展开为幂级数.

解 已知

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad -1<x\leqslant 1,$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad -1\leqslant x<1.$$

二者相减即得

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1},\quad -1<x<1.\quad \square$$

下面 6 个初等函数的幂级数展开式以后会经常用到,应该熟练地掌握:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ -\infty<x<+\infty.$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ -\infty<x<+\infty.$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\ -\infty<x<+\infty.$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\ -1<x\leqslant 1.$$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\ -1\leqslant x\leqslant 1.$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

最后一个展开式的成立范围依赖 α 的数值而定,详见例 3.

练习题 10.5

1. 利用已知的初等函数展开式,写出下列函数的幂级数展开式:

(1) e^{x^2};　　(2) $\cos^2 x$;

(3) $\dfrac{x^{12}}{1-x}$;　　(4) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

(5) $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$;　　(6) $(1+x)e^{-x}$.

2. 求下列函数的幂级数展开式:

(1) $(1+x)\ln(1+x)$;　　(2) $\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$;

(3) $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$;　　(4) $(1+x^2)\arctan x$.

3. 将下列函数展开成幂级数:

(1) $\arcsin x$;　　(2) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(3) $\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

4. 把函数 $f(x)=\ln x$ 按 $\dfrac{x-1}{x+1}$ 的正整数幂展开成幂级数.

5. 把函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ 按 $\dfrac{x}{1+x}$ 的正整数幂展开成幂级数.

问题 10.5

1. 证明函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2^n x)}{n!}$$

在 $x=0$ 处的 Taylor 级数除 $x=0$ 外处处发散.

2. 设 f 及其所有导数在区间 $[0,r]$ 上都是非负的，证明 f 能在 $[0,r]$ 上展开为 Taylor 级数：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\ x\in[0,r).$$

3. 求证：

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

4. $S_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}$，$n=2,3,\cdots$，证明

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{S_n}{n}=\gamma,\ \gamma \text{ 是 Euler 常数}.$$

§ 10.6 用多项式一致逼近连续函数

设 f 是定义在有限闭区间 $[a,b]$ 上的函数，如果对任意 $\varepsilon>0$，总能找到多项式 P，使得对 $[a,b]$ 中所有的 x 均有

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon$$

成立，就说 f 在 $[a,b]$ 上能用多项式**一致逼近**.

什么样的函数能在 $[a,b]$ 上用多项式一致逼近？

如果 f 在 $(-R,R)$ 中能展开成幂级数，那么对任意 $[a,b]\subset(-R,R)$，f 在 $[a,b]$ 上能用多项式一致逼近. 但是能展开成幂级数的函数毕竟是很窄的一类函数，因为它要求函数有任意阶导数，而且就像在 § 10.5 中所看到的，即使这样强的条件还是不充分的. 下面我们将看到，f 能在 $[a,b]$ 上用多项式一致逼近的充分必要条件是 f 在 $[a,b]$ 上连续. 必要性是明显的，因为如果 f 能用多项式在 $[a,b]$ 上一致逼近，那么对任意正整数 n，存在多项式 P_n，使得不等式

$$|f(x)-P_n(x)|<\frac{1}{n}$$

在 $[a,b]$ 上成立. 这说明多项式序列 $\{P_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f，因而 f 在 $[a,b]$ 上连续. Weierstrass 在 1885 年证明 f 连续这个条件也是充分的. 那就是下面的

定理 10.21(Weierstrass) 闭区间 $[a,b]$ 上的任何连续函数 f 能在这个区

间上用多项式一致逼近.

这个在数学分析中十分重要的定理有许多有趣的证明,我们这里采用的是 Bernstein 的证明.

在§5.3中已经介绍过,定义在$[0,1]$上的函数 f 的 Bernstein 多项式 $B_n(f;x)$是指

$$B_n(f;x)=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}.$$

在那里我们证明了由它所产生的 Bernstein 算子的"**磨光性质**"和"**保形性质**".在这里我们将证明它的另一个重要性质——"**逼近性质**",即对$[0,1]$上的任何连续函数 f,

$$\lim_{n\to\infty}B_n(f;x)=f(x) \tag{1}$$

在$[0,1]$上一致地成立.证明了这一点,也就证明了定理10.21.

为了证明(1),让我们回忆一下在§5.3中已经得到的两个等式

$$B_n(1;x)=1, \tag{2}$$

$$B_n(x;x)=x. \tag{3}$$

在§5.3的练习题中还让大家证明过:

$$B_n(x^2;x)=\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{1}{n}x. \tag{4}$$

利用(2),(3),(4)很容易证明下面的不等式:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{n}{4},0\leqslant x\leqslant 1. \tag{5}$$

事实上,(5)的左端等于

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k^2-2knx+n^2x^2)x^k(1-x)^{n-k}\\ &=n^2B_n(x^2;x)-2nx(nB_n(x;x))+n^2x^2B_n(1;x).\end{aligned}$$

把(2),(3),(4)代入上式即得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k}\\ &=n^2\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{1}{n}x\right)-2n^2x^2+n^2x^2\\ &=nx(1-x)\leqslant\frac{n}{4}.\end{aligned}$$

这就是(5).

现在不难证明

定理 10.22(Bernstein) 设 f 是闭区间$[0,1]$上的连续函数,那么 f 的

Bernstein 多项式序列$\{B_n(f;x)\}$在$[0,1]$上一致收敛于 $f(x)$.

证明 由恒等式(2)即得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

于是

$$\begin{aligned}&B_n(f;x)-f(x)\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.\end{aligned}\tag{6}$$

由于 f 在$[0,1]$上连续,因而一致连续.故对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,只要 $x',x''\in[0,1]$且满足$|x'-x''|<\delta$,就有$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$.现在固定 x,并命

$$E_1=\left\{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta\right\},$$

$$E_2=\left\{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta\right\}.$$

从(6)可得

$$\begin{aligned}|B_n(f;x)-f(x)|&\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&=\sum_{k\in E_1}+\sum_{k\in E_2}.\end{aligned}\tag{7}$$

因为 f 在$[0,1]$上连续,故有界,设$|f(x)|\leqslant M,0\leqslant x\leqslant 1$.于是由(5)即得

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in E_1}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&\leqslant\frac{2M}{\delta^2}\delta^2\sum_{k\in E_1}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&\leqslant\frac{2M}{\delta^2}\sum_{k\in E_1}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&\leqslant\frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{M}{2n\delta^2}.\end{aligned}\tag{8}$$

对于第二个和式,利用 f 在$[0,1]$上的一致连续性,可得

$$\sum_{k\in E_2}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{9}$$

由(7),(8),(9)即得

$$|B_n(f;x)-f(x)|\leqslant\frac{M}{2n\delta^2}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

让 $n>\left[\frac{M}{\varepsilon\delta^2}\right]$就有

$$|B_n(f;x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

对任意 $x\in[0,1]$成立.这就证明了$\{B_n(f;x)\}$在$[0,1]$上一致收敛于 $f(x)$. □

现在给出定理 10.21 的证明:

设 $f(x)$在$[a,b]$上的连续函数,作变换

$$x=a+(b-a)t,$$

并记 $f(a+(b-a)t)=g(t)$,那么 g 是$[0,1]$上的连续函数.由定理 10.22,对任意 $\varepsilon>0$,存在多项式 $P(t)$,使得

$$|g(t)-P(t)|<\varepsilon$$

在$[0,1]$上成立.用 $t=\dfrac{x-a}{b-a}$代入,即得

$$\left|f(x)-P\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right|<\varepsilon$$

在$[a,b]$上成立.这就证明了定理 10.21. □

必须指出,如果把有限闭区间$[a,b]$改成开区间或无穷区间,定理就不一定成立.例如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$是$(0,1]$上的连续函数,但它在 $x=0$ 附近是无界的,因此不可能用多项式来一致逼近.同样,$f(x)=\dfrac{1}{x}$也在$[1,+\infty)$上连续且有界,而任一多项式在$[1,+\infty)$上必定无界,故也不能用来一致逼近 $f(x)$.

上面给出的 Weierstrass 定理的证明,在数学上叫做**"构造性证明"**,它不仅证明逼近 f 的多项式P 是存在的,而且给出了 P 的具体构造,那就是 f 的 Bernstein 多项式序列 $B_n(f;x)$.进一步的问题自然是问逼近的速度如何?如果逼近的速度很快,那么用 $B_n(f;x)$代替 $f(x)$在数值计算上将取得很大的效益.遗憾的是实际情况并非如此.例如拿 $f(x)=x^2$ 来说,由(4)可得

$$B_n(x^2;x)-x^2=\frac{x(1-x)}{n}\leqslant\frac{1}{4n}.$$

那就是说,用 x^2 的 Bernstein 多项式来逼近 x^2 时,逼近的阶是$\dfrac{1}{n}$.这是非常慢的速度.由此足以说明,Bernstein 多项式在数值计算的应用上是没有前途的.P. J. Davis 在 20 世纪 60 年代中期出版的《插值与逼近》一书中谈到这一点时曾说,或许当人们发现逼近多项式在大范围中的性质比逼近的速度更重要时,Bernstein 多项式才能得到有效的应用.事实证明,Davis 的看法非常正确.差不多在他发表这一看法的同时,Bezier 已经把 Bernstein 多项式的"保形性质"用到了自由型曲线和曲面的设计中去了.这些在第 5 章和第 8 章中已经提到.

问题 10.6

1. 按照下列步骤给出 Weierstrass 逼近定理的另一个证明：

(1) 设 $c_n=\left\{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x\right\}^{-1}$，证明 $c_n<\sqrt{n}$；

(2) 设 f 是$[0,1]$上的连续函数，并且 $f(0)=f(1)=0$. 当 $x\bar{\in}[0,1]$时，定义 $f(x)=0$. 记 $Q_n(x)=c_n(1-x^2)^n$. 证明：

$$P_n(x)=\int_{-1}^{1}f(x+t)Q_n(t)\mathrm{d}t,0\leqslant x\leqslant 1$$

是一个多项式，而且

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=f(x)$$

在$[0,1]$上一致地成立；

(3) 当 $f(0)=f(1)=0$ 的条件不成立时，证明 Weierstrass 的逼近定理.

2. 设 f 在$[0,1]$上连续，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)=0.$$

3. 设 f 是$[a,b]$上的连续函数，如果

$$\int_a^b f(x)x^n\mathrm{d}x=0,n=0,1,2,\cdots,$$

那么 f 在$[a,b]$上恒等于 0.

4. 若 f 在$(-\infty,+\infty)$中能用多项式一致逼近，那么 f 必为一多项式.

5. 设 f 在$[0,1]$中有连续的导数，证明

$$\lim_{n\to\infty}B_n'(f;x)=f'(x)$$

在$[0,1]$中一致地成立，其中 $B_n(f;x)$是函数 f 的 Bernstein 多项式.

§ 10.7 幂级数在组合数学中的应用

幂级数理论在组合数学中的应用是通过母函数这一概念来实现的.

定义 10.3 设$\{a_n\}$是一个给定的数列，称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

为$\{a_n\}$的**母函数**或**生成函数**.

数列和它的母函数之间是一一对应的.引进母函数概念后,有些与数列有关的问题可以通过它的母函数来解决.

§10.5 的例 3 已经得到了函数$(1+x)^\alpha$的幂级数展开式:对任意实数α有

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,|x|<1. \tag{1}$$

这说明函数$(1+x)^\alpha$是数列

$$\binom{\alpha}{0},\binom{\alpha}{1},\cdots,\binom{\alpha}{n},\cdots$$

的母函数.

根据这一事实,便可推出若干有趣的组合恒等式.

例 1　设α,β是任意实数,证明:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}=\binom{\alpha+\beta}{n}. \tag{2}$$

证明　因为数列$\left\{\binom{\alpha}{k}\right\},\left\{\binom{\beta}{k}\right\}$的母函数分别为$(1+x)^\alpha$与$(1+x)^\beta$,所以

$$\begin{aligned}(1+x)^{\alpha+\beta}&=(1+x)^\alpha(1+x)^\beta\\&=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\beta}{k}x^k\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}\right)x^n,\end{aligned}$$

这里我们已经应用了定理 10.18.由此可见数列$\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}\right\}$的母函数是$(1+x)^{\alpha+\beta}$.但另一方面,$\left\{\binom{\alpha+\beta}{n}\right\}$的母函数也是$(1+x)^{\alpha+\beta}$,这两个数列应该是相同的.这样就得到了等式(2).　□

若在上面的等式中取$\alpha=\beta=n$,则可得等式

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}.$$

例 2　设p,q,n都是自然数,证明

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{p}\binom{q+n-k}{q}=\binom{p+q+n+1}{p+q+1}. \tag{3}$$

证明　由(1)得

$$(1+x)^{-p-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-p-1}{n}x^n. \tag{4}$$

因为

$$\binom{-p-1}{n}=(-1)^n\frac{(p+1)\cdots(p+n)}{n!}$$
$$=(-1)^n\binom{p+n}{p},$$

故从(4)可得

$$(1-x)^{-p-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{p+n}{p}x^n.$$

同理可得

$$(1-x)^{-q-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{q+n}{q}x^n.$$

所以

$$(1-x)^{-(p+q+2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{p}\binom{q+n-k}{q}\right)x^n.$$

这说明数列$\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{p}\binom{q+n-k}{q}\right\}$的母函数是$(1-x)^{-(p+q+2)}$，但它同时又是数列$\left\{\binom{p+q+n+1}{p+q+1}\right\}$的母函数，因而(3)成立. □

母函数方法还是求解线性递归数列一般表达式的有力工具.

例 3 设数列$\{a_n\}$满足线性递归关系

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2},n=2,3,\cdots,$$

已知初始值$a_0=1,a_1=1$，求$\{a_n\}$的一般表达式.

解 设数列$\{a_n\}$的母函数是$f(x)$，我们有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n,$$
$$-xf(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$$
$$=-x-\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n,$$
$$-x^2f(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}=-\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n.$$

把上面三个等式加起来就得

$$(1-x-x^2)f(x)=1+\sum_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1}-a_{n-2})x^n=1.$$

因而得$\{a_n\}$的母函数

$$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}.$$

为了求得$\{a_n\}$的一般表达式，只要把 $f(x)$展开为幂级数就行了. 先把 $f(x)$分解成部分分式:

$$f(x)=\frac{1}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{x-r_1}-\frac{1}{x-r_2}\right),$$

其中 r_1,r_2 是方程 $1-x-x^2=0$ 的两个根:

$$r_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},r_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

由于

$$\frac{1}{x-r_1}=-\frac{1}{r_1\left(1-\frac{x}{r_1}\right)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r_1^{n+1}}x^n,$$

$$\frac{1}{x-r_2}=-\frac{1}{r_2\left(1-\frac{x}{r_2}\right)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r_2^{n+1}}x^n,$$

所以

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{r_2^{n+1}}-\frac{1}{r_1^{n+1}}\right)\right\}x^n.$$

于是

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{r_2^{n+1}}-\frac{1}{r_1^{n+1}}\right)\\&=\frac{1}{(r_1r_2)^{n+1}}\frac{r_1^{n+1}-r_2^{n+1}}{r_2-r_1}.\end{aligned}$$

又 $r_1r_2=-1,r_2-r_1=-\sqrt{5}$, 且

$$\begin{aligned}r_1^{n+1}-r_2^{n+1}&=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\\&=(-1)^{n+2}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}.\end{aligned}$$

故有

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\},n=0,1,2,\cdots.$$

这就是要求的$\{a_n\}$的一般表达式. □

这个数列通常称为 Fibonacci 数列. 这个表达式如果不是通过现在的方法计算出来是很难想像的：一串正整数通过一个包含无理数的式子表示出来！

例 4 计算 $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-k}{k}$.

解 设所求的和为 a_n，即

$$a_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-k}{k},$$

那么 $\{a_n\}$ 是一数列，能否用母函数的方法算出 a_n？先看一下 $\{a_n\}$ 是否满足简单的递归关系. 先设 $n=2m$，那么

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=0}^{m}\binom{2m-k}{k}\\&=1+\sum_{k=1}^{m-1}\binom{2m-k-1}{k}\\&\quad+\sum_{k=1}^{m-1}\binom{2m-k-1}{k-1}+1.\end{aligned}\tag{5}$$

前两项的和为

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{2m-k-1}{k}&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\binom{n-1-k}{k}.\\&=a_{n-1},\end{aligned}$$

后两项的和为

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m-1}\binom{2m-k-1}{k-1}+\binom{m-1}{m-1}&=\sum_{l=0}^{m-2}\binom{2m-l-2}{l}+\binom{m-1}{m-1}\\&=\sum_{l=0}^{m-1}\binom{2m-l-2}{l}\\&=\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}\binom{n-2-l}{l}=a_{n-2}.\end{aligned}$$

从(5)即得

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}.\tag{6}$$

当 $n=2m+1$ 时，

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1-k}{k}=1+\sum_{k=1}^{m}\binom{2m+1-k}{k}\\&=1+\sum_{k=1}^{m}\binom{2m-k}{k}+\sum_{k=1}^{m}\binom{2m-k}{k-1}\\&=\sum_{k=0}^{m}\binom{2m-k}{k}+\sum_{l=0}^{m-1}\binom{2m-l-1}{l}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-1-k}{k} + \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \binom{n-2-l}{l}$$

$$= a_{n-1} + a_{n-2}.$$

这就证明(6)对 $n=2,3,\cdots$都成立.另外容易知道

$$a_0 = a_1 = 1.$$

故由例 3 立刻知道

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right). \quad \square$$

一般说来,如果数列$\{a_n\}$满足 k 阶线性递归关系

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

$$c_k \neq 0, n = k, k+1, \cdots,$$

且 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$这 k 个初始值已知,那么用例 3 的方法都能求得$\{a_n\}$的一般表达式.但若$\{a_n\}$满足非线性的递归关系,那么只在一些特殊的情况下才能求得$\{a_n\}$的一般表达式.下面就是一个这样的例子.

例 5 用 $n-3$ 条在内部不相交的对角线,把一个凸 n 边形分成 $n-2$ 个三角形,问一共有多少种不同的方法?

解 设对凸 $n+1$ 边形有 a_n 种不同的分法,我们设法来求数列$\{a_n\}$的母函数.显然 $n=0$ 和 $n=1$ 时问题没有意义,我们规定 $a_0=0, a_1=1$. $n=2$ 时,$n+1$ 边形是个三角形,它只有一种分法,就是它自己,因此 $a_2=1$.令设 $n\geqslant 3$.我们在凸 $n+1$ 边形 T 中先任意取定一条边,例如图 10-4 中的 AB,另取一点 C.设$\triangle ABC$ 左边的图形 T_1 是一个凸 $k+1$ 边形,那么$\triangle ABC$ 右边的图形 T_2 必是一个凸 $n-k+1$ 边形.根据假定,凸 $k+1$ 边形 T_1 有 a_k 种不同的分法,凸 $n-k+1$ 边形 T_2 有 a_{n-k}种不同的分法,T_1, T_2 的每一种分法就给出整个 $n+1$ 边形 T 的一种分法.因为 T_1 有 a_k 种分法,T_2 有 a_{n-k}种分法,故 T 有$a_k a_{n-k}$种分法,这些分法是对固定的 C 点而言的,令让 C 点取遍A, B 外的所有点,那么共有

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_1$$

种不同的分法,这就是凸 $n+1$ 边形的所有可能不同的分法.因而

$$a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_1, n \geqslant 3.$$

这就是$\{a_n\}$满足的递推关系.这个关系与例 3 的递推关系是根本不同的,它是非线性的,但我们仍可用

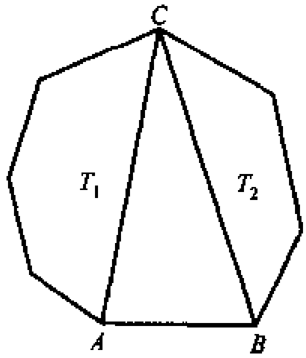

图 10-4

母函数的方法求其解.设数列$\{a_n\}$的母函数是$f(x)$,即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,a_1=1,a_0=0.$$

于是根据幂级数的乘法,

$$\begin{aligned}f^2(x)&=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\Big)^2\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}\Big)x^n\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}\Big)x^n\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}\Big)x^n\\&=\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=f(x)-x.\end{aligned}$$

这就是说$f(x)$满足一个二次方程

$$f^2(x)-f(x)+x=0.$$

有两个函数满足上面的方程,它们是

$$f_1(x)=\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2},f_2(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}.$$

由于$f_1(0)=1,f_2(0)=0$,面我们要找的f满足

$$f(0)=a_0=0,$$

所以

$$f(x)=f_2(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}.$$

把它展开成幂级数,就能得到a_n的表达式.由于

$$\begin{aligned}\binom{\frac{1}{2}}{n}&=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\\&=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2^nn!}\\&=(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!\ n!}\\&=(-1)^{n-1}\frac{1}{n2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1},\end{aligned}$$

由二项式展开式

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n$$

$$=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^{2n-1}}4^n\binom{2n-2}{n-1}x^n$$

$$=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n,$$

于是

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n.$$

所以

$$a_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}. \quad \square$$

练习题 10.7

1. 证明恒等式：

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{k+n-1}{n-1}=\binom{m+n}{n}.$$

2. 证明 $\left\{\binom{2n}{n}\right\}$ 的母函数是 $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$.

3. 证明：$\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=2^{2n}$.

4. 证明：$\sum_{k=0}^{n}k\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=n2^{2n-1}$.

   提示：从数列 $\left\{\binom{2n}{n}\right\}$ 的母函数找数列 $\left\{n\binom{2n}{n}\right\}$ 的母函数.

5. 证明：$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}\binom{m}{k}=m\binom{n+m-1}{n-1}$.

6. 求满足下列递推关系和初始条件的数列 $\{a_n\}$：

   (1) $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}, a_0=1, a_1=-2$;

   (2) $a_n=-a_{n-1}+16a_{n-2}-20a_{n-3}, a_0=0, a_1=1, a_2=-1$;

(3) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2^{n-2}, a_0 = a_1 = 1$.

问题 10.7

1. 证明：$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1-2k}\binom{2k}{k}2^{2n-2k} = \binom{2n}{n}$.

2. 设 a 是一实数，计算 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} a^k$.

3. 利用上题的结果，证明：

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} 2^k \binom{n-k}{k} = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n)$;

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \binom{n-k}{k} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{n+1}{3}\pi$.

4. 证明：

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k}\right\}\left\{\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} + \cdots + \binom{n}{n}\right\} = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}.$$

§ 10.8 从两个著名的例子谈起

作为函数项级数理论的应用，我们介绍两个著名的例子，这两个例子在澄清一些模糊的认识方面起过重要的作用.

（一）处处连续处处不可微的函数

在第 9 章的引言中，我们已经指出，第一个具有这种性质的函数是 1875 年由 Weierstrass 作出的. 下面介绍的这个函数是 1930 年由 Van der Waerden 所构造的，在想法上更为直观.

在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 这一区间上，以它为斜边，向横轴的上方作一等腰直角三角形，它的两条直角边确定了 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上的一个连续函数. 然后把这个函数在整个实轴上进行周期为 1 的周期延拓，所成的函数记为 $u_0(x)$. 显然，$u_0(x)$ 是一

个分段线性的、以 1 为周期的连续函数. 它在一列长度为$\frac{1}{2}$的区间上是线性的,我们称这些区间为 $u_0(x)$的"**线性区间**". 在线性区间的内部,$u_0(x)$是可微的,并且 $u_0'(x)=1$ 或 -1. 另外,对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$有 $0\leqslant u_0(x)\leqslant\frac{1}{2}$. 所有这些性质在图 10-5 上是一目了然的. 现在来构造函数 $u_1(x)$:把 $y=u_0(x)$的图形与横轴围成的每一个等腰直角三角形的斜边四等分,接着在每一小份上向 x 轴上方作一个等腰直角三角形,所有这种直角三角形的直角边组成一条连续的折线,它定义一个函数 $u_1(x)$. 我们把 $u_1(x)$的图形与 $u_0(x)$的图形都画在图 10-5 中.

由图 10-5 立刻可见:$u_1(x)$是以$\frac{1}{4}$为周期的周期函数;$u_1(x)$的最大值是$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$,因此它适合 $0\leqslant u_1(x)\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$;$u_1(x)$的线性区间的长度是$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$,且每一线性区间完全含在 $u_0(x)$的某一线性区间之内;在 $u_1(x)$的线性区间的内点有 $u_1'(x)=1$ 或 -1.

采用上述"一分为四"的办法,可以依次定义函数 $u_2(x),u_3(x),\cdots$. 就是说,由 $u_{n-1}(x)$构造出 $u_n(x)$的方式与由 $u_0(x)$构造出 $u_1(x)$的方式完全一样. 因此,由几何作图法立即得知:

1° $u_n(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的连续的周期函数,它的周期是$\frac{1}{4^n}$,这里 $n=0,1,2,\cdots$;

2° $u_n(x)$满足不等式:$0\leqslant u_n(x)\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^n}$, $-\infty<x<+\infty$;

3° $u_n(x)$的线性区间的长度为$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^n}$,且每一线性区间完全在 $u_{n-1}(x)$的某个线性区间之内;

4° 在 $u_n(x)$的线性区间的内点上,有 $u_n'(x)=1$ 或 -1.

把上面这些函数

$$u_0(x),u_1(x),\cdots,u_n(x),\cdots$$

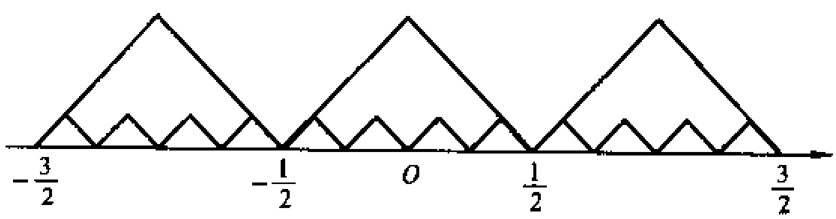

图 10-5

叠加起来,考虑由它们构成的函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)=u_0(x)+u_1(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots.$$

由性质 2°知道,

$$0\leqslant u_n(x)\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^n},\ -\infty<x<+\infty,$$

而级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}<+\infty$. 故由 Weierstrass 判别法知道,上面的级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛,因而它的和函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)$$

是实数轴上的连续函数. 这就是 Van der Waerden 所构造的函数.

下面证明 f 在$(-\infty,+\infty)$上处处不可微. 任取 $x\in(-\infty,+\infty)$,我们证明 $f'(x)$不存在,这仅需找到一数列$\{x_n\}$,使得 $x_n\to x(n\to\infty)$,但

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}$$

不存在.

对于给定的 x,先取 x_n,使得 x 与 x_n 同属于 $u_n(x)$的某一个线性区间,并有

$$|x-x_n|=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^n}\right)=\frac{1}{4^{n+1}}. \tag{1}$$

这总是办得到的,因为$\frac{1}{4^{n+1}}$是 $u_n(x)$的线性区间长度的一半(见性质 3°). 由此可见,当 $n\to\infty$时,$x_n\to x$. 我们证明,对于这样选定的 x_n 有下面的等式:

$$\frac{u_k(x_n)-u_k(x)}{x_n-x}=\begin{cases}\pm 1, & k=0,1,\cdots,n;\\ 0, & k=n+1,n+2,\cdots.\end{cases} \tag{2}$$

事实上,由于 x_n 与 x 同在 $u_n(x)$的某一线性区间上,由性质 3°,x_n 与 x 也同在 $u_{n-1}(x)$的某一线性区间上. 反复利用性质 3°,即可推知 x_n 与 x 同在 $u_{n-2}(x)$,$u_{n-3}(x),\cdots,u_1(x),u_0(x)$的线性区间上. 根据性质 4°便得

$$\frac{u_k(x_n)-u_k(x)}{x_n-x}=\pm 1$$

对于 $k=0,1,\cdots,n$ 均成立. 这就是(2)的第一个等式. 再注意到$\frac{1}{4^{n+1}}$是 $u_{n+1}(x)$的周期,故由(1)知

$$u_{n+1}(x_n)=u_{n+1}(x).$$

由于$\frac{1}{4^{n+1}}$也是 $u_{n+2}(x),u_{n+3}(x),\cdots$等函数的周期,所以

$$u_k(x_n)=u_k(x)$$

对 $k=n+1,n+2,\cdots$都成立.这样就得到(2)的第二个等式.从(2)立刻可得

$$\begin{aligned}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}&=\frac{1}{x_n-x}\sum_{k=0}^{\infty}(u_k(x_n)-u_k(x))\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{u_k(x_n)-u_k(x)}{x_n-x}\\&=\sum_{k=0}^{n}(\pm1).\end{aligned}\tag{3}$$

当 n 取不同的值时,(3)右端和式中 ±1 的分布是不一样的,因而(3)的右端并不是某个由 1 和 -1 构成的级数的部分和,但若注意到

$$\sum_{k=0}^{n}(\pm1)=\begin{cases}\text{偶数,当 } n \text{ 为奇数时;}\\ \text{奇数,当 } n \text{ 为偶数时,}\end{cases}$$

立刻可以断言:当 $n\to\infty$时(3)的极限不存在.这就证明了 f 在 x 点处不可微.由于 x 是任取的,所以 f 在整个数轴上处处不可微.

(二) 填满正方形的连续曲线

1890 年,Peano 构造出一条连续曲线,它把整个正方形填满了.这一事实初听起来,就像处处连续处处不可微的函数那样令人不可思议.用我们熟知的那些初等函数是构造不出这种曲线的,还是要依靠无穷级数来做.下面介绍的例子是 Schoenberg 于 1938 年提出的.

记 $I=[0,1]$,我们要构造一条连续曲线

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}t\in I.$$

当 t 走遍区间$[0,1]$时,$(x(t),y(t))$连续地走遍正方形 $I\times I$ 中每一点.为此,在 I 上定义函数 φ 如下:

$$\varphi(t)=\begin{cases}0, & t\in\left[0,\frac{1}{3}\right];\\ 3t-1, & t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right];\\ 1, & t\in\left[\frac{2}{3},1\right].\end{cases}$$

然后再把 φ 扩充为整个数轴上周期为 2 的偶函数(图 10-6),即让 φ 满足

$$\varphi(t)=\varphi(-t),\varphi(t+2)=\varphi(t),-\infty<t<+\infty.$$

现在命

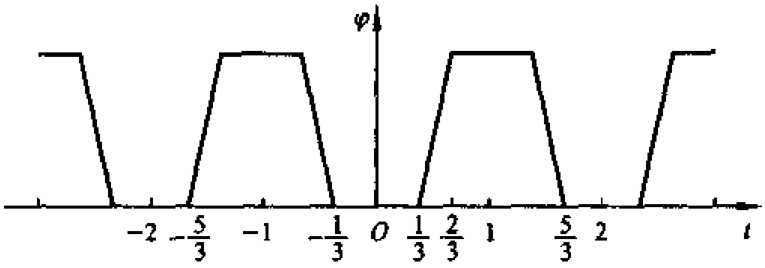

图 10-6

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varphi(3^{2n-2}t)}{2^n}, \\ y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varphi(3^{2n-1}t)}{2^n}, \end{cases} \quad t \in I. \tag{4}$$

这就是能填满正方形 $I\times I$ 的连续曲线.

由于 $0\leqslant\varphi(t)\leqslant 1$,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 是上面两个级数的收敛的优级数,因而 $x(t),y(t)$ 都是 I 上的连续函数,所以(4)是一条连续曲线.为了证明它能填满正方形 $I\times I$,只要能证明对于任取的 $(a,b)\in I\times I$,一定存在 $\eta\in I$,使得

$$x(\eta)=a, \quad y(\eta)=b. \tag{5}$$

为此把 a,b 用二进位小数表示为:

$$a=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}, \quad b=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2^n},$$

这里 a_n,b_n 都只取 0,1 中的某一个值,把 $\{a_n\},\{b_n\}$ 交错排列为

$$a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n,\cdots,$$

并重新记为

$$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\cdots,\eta_{2n-1},\eta_{2n},\cdots,$$

其中 $\eta_{2n-1}=a_n,\eta_{2n}=b_n,n=1,2,\cdots$.定义

$$\eta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\eta_n}{3^n}.$$

由于

$$0\leqslant\eta\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=1,$$

所以 $\eta\in I$.我们证明 η 满足条件(5).为此先证明

$$\varphi(3^k\eta)=\eta_{k+1}, k=0,1,2,\cdots. \tag{6}$$

事实上,对于固定的 k,

$$3^k\eta=2\sum_{n=1}^{k}3^{k-n}\eta_n+\frac{2}{3}\eta_{k+1}+2\sum_{n=k+2}^{\infty}\frac{\eta_n}{3^{n-k}}.$$

容易看出第一个和式是2的整数倍，记为$2m$．若把第三个和式记为α_k，那么

$$0\leqslant\alpha_k\leqslant 2\sum_{n=k+2}^{\infty}\frac{1}{3^{n-k}}=\frac{1}{3}.$$

这样便有

$$3^k\eta=2m+\frac{2}{3}\eta_{k+1}+\alpha_k.$$

由于φ是以2为周期的周期函数，所以

$$\varphi(3^k\eta)=\varphi\left(\frac{2}{3}\eta_{k+1}+\alpha_k\right).$$

现若$\eta_{k+1}=0$，因为$0\leqslant\alpha_k\leqslant\frac{1}{3}$，所以

$$\varphi(3^k\eta)=\varphi(\alpha_k)=0=\eta_{k+1}.$$

如果$\eta_{k+1}=1$，那么$\frac{2}{3}\leqslant\frac{2}{3}\eta_{k+1}+\alpha_k\leqslant 1$，所以

$$\varphi(3^k\eta)=\varphi\left(\frac{2}{3}+\alpha_k\right)=1=\eta_{k+1}.$$

因而(6)成立．现在

$$x(\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(3^{2n-2}\eta)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta_{2n-1}}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=a,$$

$$y(\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(3^{2n-1}\eta)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta_{2n}}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2^n}=b.$$

这就证明了连续曲线(4)的确填满了正方形$I\times I$．

不难看出，利用上面的方法，我们还能构造出填满整个立方体$I\times I\times I$的空间连续曲线．请读者自己证明，空间连续曲线

$$\begin{cases}x(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(3^{3n-3}t)}{2^n},\\ y(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(3^{3n-2}t)}{2^n},\ t\in I,\\ z(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(3^{3n-1}t)}{2^n}.\end{cases}$$

便能填满整个立方体$I\times I\times I$．

上述两个例子的魅力不仅在于它们揭下了两件令人感到惊异的事实，还在于它们是近十几年来正在蓬勃兴起并已很有应用前景的一门新兴学科"**分形几何**"中所谓"**分形集**"的典型例子．

很长时间以来，人们只重视那些可以用经典的微积分进行研究的函数类，那些不够光滑和不够规则的函数被认为是病态的、不值得研究的．像上面那种处处连续而处处不可微的函数、那种能填满正方形的连续曲线，它们的意义仅仅在于

这种函数或这种曲线是存在的.既然是处处不可微的,微分学的方法对它们当然是无能为力了.

近年来,这种态度开始发生了变化.人们已经意识到,不光滑、不规则的几何图形能更好地反映自然界的许多现象(如粒子的布朗运动、流体的湍流、奇形怪状的海岸线、高度无规则的材料裂纹、云彩的边界、肿瘤的边界等等),而规则的、光滑化的图形则是理想化的结果,从而有必要对那些不规则的几何图形进行详细的数学描述和研究."**分形几何**"恰好为研究这种不规则集提供了一个有力的工具.

1982 年,分形几何的奠基人 Mandelbrot 发表了他的专著《自然界的分形几何》,这标志着分形几何迈进了现代新兴学科之林.

分形几何的研究对象是分形集(或简称分形).那么,什么是分形呢? 这是一个至今没有明确定义的概念.起先,Mandelbrot 把那些 Hausdorff 维数(这里不深究它的定义)不是整数的集合称为分形,按这个定义,上面那条填满正方形的曲线就要被排除在分形之外,后来 Mandelbrot 又修改了原来的定义,把分形定义为那些局部和整体按某种方式相似的集合,这是目前被普遍接受的说法.说得更明确一些,一个分形集大体有下列这些特征:

1° 它通常有某种自相似的结构,这种自相似可以是近似的或者是统计的;

2° 它通常有错综复杂的细致的构造;

3° 它的几何性质难以用经典的数学语言来描述,它既不是满足若干简单条件的点的轨迹,也不是任何简单方程或方程组的解集;

4° 虽说它的整体甚至它的局部结构非常复杂,但它却是用简单明了的方式(通常是用迭代)所确定的.

回头来看看前面讨论过的处处连续处处不可微的函数.从几何作图来看,从 u_0 到 u_1,从 u_1 到 u_2,…,从 u_{n-1} 到 u_n,……是一次又一次地使用同样的办法,这就是"**迭代**",然后把这一系列函数迭加起来,就确定出了我们需要的函数 f.应当说,它的生成是简单的、明确的、通过迭代来完成的.但是 $y=f(x)$ 的图形,甚至在任何一点的一个充分小的邻域中都是非常复杂的.即使我们取很大的 n 作出

$$y=u_0(x)+u_1(x)+\cdots+u_n(x)$$

的图形作为它的近似,但由于这条曲线仍只在可数个点上不可微,因此与处处不可微的 $y=f(x)$ 图形有着天壤之别.所以说 $y=f(x)$ 的图形复杂得难以使人去构想,难怪在 Weierstrass 的例子出现以前,人们总以为处处连续处处不可微的函数是不存在的! 填满正方形的连续曲线也有类似的特点.

从我们举的两个例子来看,它们都是 19 世纪的产物,但却一直没有引起足够的重视.Mandelbrot 在《自然界的分形几何》一书中谈到这一现象时说:"我赞

扬这些早年的数学家,因为他们早就为我提供了这样的结构,使我能把它们串联在一起进行思考,从而发现其宝贵的价值;同时,我也责备他们,因为他们虽然构造出了许多精彩的反例,却没有发现它们之间的内在联系,反而像对待不受欢迎的畸形怪胎那样,认为那是不正常的事情。这样一来,真正深刻的内涵反而被完全忽视了."Mandelbrot 的贡献正在于找到了这些"反例"的内在联系,使它们成了分形几何中的主角.

由于分形集或分形现象广泛地存在于自然界与人们的社会活动中,各方学者都关注着这一新兴学科的发展和应用.从已发表的论文来看,它的应用而遍及哲学、数学、物理学、化学、冶金学、材料科学、计算机科学、心理学、生理学、经贸和管理科学等各个方面.

分形几何作为一门学科提出到现在刚刚 20 年的时间,但在广大科学工作者的共同努力下,无论在理论上还是应用上都已取得了巨大的进展,足见这一学科的旺盛的生命力.我们在这里通过两个例子作这引论式的介绍,只是希望引起读者对这一新兴学科的注意,至于它的研究内容与方法,不属于本课程的范围,有兴趣的读者可参阅 K.J.Falconer 著的《分形几何——数学基础及其应用》一书.

练习题 10.8

1. 证明空间连续曲线

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varphi(3^{3n-3}t)}{2^n}, \\ y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varphi(3^{3n-2}t)}{2^n}, \quad t\in[0,1], \\ z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varphi(3^{3n-1}t)}{2^n}, \end{cases}$$

能填满整个立方体$[0,1]^3$,其中 φ 如课文中所定义的.

附录 问题的解答与提示

第 1 章 实数和数列极限

问题 1.1

1. 记 $k=\frac{a^2+b^2}{1+ab}$，设其为正整数．如果 $a=b$，可得 $(2-k)a^2=k$，由此可知 $k=1$，它当然是个平方数．

现不妨设 $a>b\geqslant 0$．如果 $b=0$，那么 $k=a^2$，它是一平方数．因此可设 $a>b>0$，现固定 b，讨论下列二次方程

$$x^2-kbx+b^2-k=0.$$

已知它有一根 a，记另一根为 a_1，那么

$$a+a_1=kb,$$
$$aa_1=b^2-k.$$

由前一式得 $a_1=kb-a$，可见 a_1 是一整数．由第二式得出

$$a_1=\frac{b^2-k}{a}<\frac{b^2}{a}=\frac{b}{a}\cdot b<b.$$

我们指出 $a_1\geqslant 0$．如若不然，由

$$0=a_1^2+b^2+(-a_1)bk-k\geqslant a_1^2+b^2>0$$

得出矛盾．所以说 $a>b>a_1\geqslant 0$．由此得

$$k=\frac{a^2+b^2}{1+ab}=\frac{a_1^2+b^2}{1+a_1b}.$$

如果 $a_1=0$，即得 $k=b^2$ 是一平方数．现设 $a_1>0$，这时 $b>a_1>0$，对 $k=\frac{b^2+a_1^2}{1+ba_1}$ 重复刚才的推理，可知存在整数 b_1 满足 $b>a_1>b_1\geqslant 0$，并使

$$k=\frac{a_1^2+b_1^2}{1+a_1b_1}.$$

这样又回到了原来的情况，不过这时有

$$a>b>a_1>b_1.$$

这个过程不可能无限地进行下去，必然有一个 $a_i=0$ 或 $b_j=0$，不论何者发生，k 都是一个平方数．

2．用数学归纳法和练习题 1.1 的第 13 题．

3. 因为$(a_i-a_j)(b_i-b_j)\geqslant 0$,故有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)\geqslant 0,$$

由此即得要证的不等式.

4. 利用 Tchebycheff 不等式.

问题 1.2

1. 按照规定,x 的前若干项是

$$x=0.011010100010 10\cdots,$$

这是一个无尽小数,若能说明它不是循环的,那么它就是一个无理数. 设 $k\geqslant 2$ 为任一正整数,考察以下 $k-1$ 个连续的正整数:

$$k!+2,k!+3,\cdots,k!+k,$$

它们都不是素数,因为它们分别可被 $2,3,\cdots,k$ 整除. 这表明,在正整数列中可以有任意长的一串连续数不是素数,也就是说,在 x 的小数表示中,可以有任意多的 0 连成一片地出现,因而 x 不可能是循环的.

2. 设正有理数$\dfrac{p}{q}$满足

$$\left|\pi-\frac{p}{q}\right|<\frac{355}{113}-\pi,$$

即

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{355}{113}\right|\leqslant\left|\frac{p}{q}-\pi\right|+\left(\frac{355}{113}-\pi\right)<2\left(\frac{355}{113}-\pi\right).$$

由此可得

$$0<\frac{|113p-355q|}{113q}<2\left(\frac{16}{113}-(\pi-3)\right)<2(0.266\ 765\times 10^{-6}).$$

所以

$$q>\frac{10^6}{226\times 0.266\ 765}>16\ 586.$$

问题 1.4

1. 先考虑 $b=0$ 的情形,利用例 4 的结论. 再把一般的情形化至 $b=0$ 的情形.

2. 利用题设的条件和例 4 的结论,先证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{2n}}{2n}=0$,再证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{2n+1}}{2n+1}=0$. 因而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=0$,由此即得所要的结论.

3. 先设 $a=0$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,对任意 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n>N$ 时有$|a_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 此时

$$\begin{aligned}|x_n|&\leqslant\sum_{k=1}^{n}t_{nk}|a_k|=\sum_{k=1}^{N}t_{nk}|a_k|+\sum_{k=N+1}^{\infty}t_{nk}|a_k|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{N}t_{nk}|a_k|+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} t_{nk} |a_k| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

当 $n\to\infty$时，上式第一项是有限个无穷小量的和，因此存在 $N_1>N$，当 $n>N_1$ 时有

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

此即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. 当 $a\neq 0$ 时，我们有 $b_n = a_n - a\to 0$ 若令 $x_n' = \sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} b_k$，则 $x_n'\to 0$. 于是

$$\begin{aligned} x_n = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_k &= \sum_{k=1}^{n} t_{nk} b_k + a \sum_{k=1}^{n} t_{nk} \\ &= x_n' + a, \end{aligned}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

注意，这是一个一般性的定理，取一些特殊的$\{t_{nk}\}$，便可得到一些新的结论.

例如，取 $t_{nk} = \frac{1}{n}$，$k=1,\cdots,n$，那么 $t_{nk}>0$，$\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk} = 0$ 都满足. 这时

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

于是就得到：若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

这正是§1.4 例 4 的结论.

4. 在第 3 题中取 $t_{nk} = \frac{2}{n(n+1)} k$，$k=1,2,\cdots,n$.

5. 在第 3 题中取 $t_{nk} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$，$k=0,1,\cdots,n$.

问题 1.5

1. 题中的条件可写为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}} = 0.$$

用反证法，如果$\{a_n\}$有界，设 $0<a_n<M$，$n=1,2,\cdots$由此可推出$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 于是对 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时有

$$a_n < \varepsilon, \qquad a_n < (a_{n+1} + a_{n+2})\varepsilon.$$

这样

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< (a_{N+2} + a_{N+3})\varepsilon \\ &< ((a_{N+3} + a_{N+4}) + (a_{N+4} + a_{N+5}))\varepsilon^2 \\ &= (a_{N+3} + 2a_{N+4} + a_{N+5})\varepsilon^2 \\ &< (a_{N+4} + 3a_{N+5} + 3a_{N+6} + a_{N+7})\varepsilon^3 \\ &< \cdots \\ &< M\varepsilon^p \left(1 + \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \cdots + \binom{p}{p}\right) \end{aligned}$$

$$=M(2\varepsilon)^p.$$

这里 p 是任意的正整数.今取 $\varepsilon=\frac{1}{4}$,上式为

$$0<a_{N+1}<M\left(\frac{1}{2}\right)^p.$$

让 $p\to+\infty$,即得 $a_{N+1}=0$.这与 $a_{N+1}>0$ 矛盾.

问题 1.6

1. 由平均值不等式可得

$$a_{n+1}\geqslant\sqrt{c}a_n\geqslant\cdots\geqslant(\sqrt{c})^n a_1,$$

故当 $c>1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

今设 $0<c\leqslant1$,将

$$a_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{1}{2}a_n^2,$$

$$a_n=\frac{c}{2}+\frac{1}{2}a_{n-1}^2,$$

相减即可推出 $\{a_n\}$ 是递增数列.再用归纳法证明 $\{a_n\}$ 有上界 1.因而可设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,于是得

$$a=\frac{c}{2}+\frac{a^2}{2}.$$

所以 $a=1-\sqrt{1-c}$.

2. 关键的一步是把递推公式改写为

$$u_{n+1}-a=(u_n-a)^2+u_n-a.$$

令 $v_n=u_n-a$,上式就变为

$$v_{n+1}=v_n^2+v_n, \tag{1}$$

其中 $v_1=b-a$,从(1)出发可以证明,当 $b\in[a-1,a]$ 时,数列 $\{u_n\}$ 收敛于 a.

3. 命 $x_n=Ay_n$,则 $x_{n+1}=x_n(2-x_n)$, $n=0,1,\cdots$.由此可以证明 $0<x_n<1$ 和 $x_n<x_{n+1}$,因而可设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,从递推公式即得 $a=1$.所以 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A^{-1}$.

4. 在递推公式两端除以 3^n,得

$$\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}.$$

命 $b_n=\frac{a_n}{3^n}$,上式可写为

$$b_n+b_{n-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

由此可解出

$$b_{n+1}=(-1)^n\left[\frac{1}{5}\left(1-\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}\right)-a_0\right].$$

要求 $\{3^n b_n\}$ 严格递增,当 n 为偶数时,可得 $a_0\leqslant\frac{1}{5}$,当 n 为奇数时得 $a_0\geqslant\frac{1}{5}$.因此 $a_0=\frac{1}{5}$.

问题 1.7

1. 由二项式定理

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

右端的不等式显然成立.利用下面的事实:

"如果 $a_1,\cdots,a_k\in(0,1)$,那么

$$(1-a_1)\cdots(1-a_k)>1-a_1-a_2-\cdots-a_k\text{"}$$

立刻可证得左端的不等式.

2. 利用等式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\varepsilon_n,\quad \varepsilon_n\to0(n\to\infty)$$

3. 取对数后利用练习题 1.7 的第 7 题.

4. 由 k_n 的定义得

$$H_{k_n-1}<n\leqslant H_{k_n},$$

即

$$H_{k_n}-\frac{1}{k_n}<n\leqslant H_{k_n}.$$

由此可算出

$$\lim_{n\to\infty}(H_{k_{n+1}}-H_{k_n})=1.$$

再利用练习题 1.7 第 10 题的公式即得.

5. $\dfrac{(n-1)^{n-1}}{n^n}=\dfrac{1}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{v_n}{n-1}.$

其中 $v_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.由于 v_n 递增地趋于 e^{-1},所以

$$\frac{1}{4}=v_2<v_3<\cdots<v_n<\frac{1}{e}.$$

但是

$$s_{n-1}<(n-1)(n-1)^{n-1}=(n-1)^n<n^n,$$

所以

$$s_n=s_{n-1}+n^n<2n^n,$$
$$s_{n-1}<2(n-1)^{n-1}=2n^n\frac{v_n}{n-1}<\frac{2}{e}\frac{n^n}{n-1}.$$

于是

$$s_n=s_{n-1}+n^n<n^n\left(1+\frac{2}{e(n-1)}\right).$$

另一方面,

$$(n-1)^{n-1}=\frac{n^n}{n-1}v_n>\frac{n^n}{4(n-1)}.$$

所以

$$s_n=s_{n-1}+n^n>(n-1)^{n-1}+n^n>n^n\left(1+\frac{1}{4(n-1)}\right).$$

问题 1.10

1. 反证法.如果不存在这样的 $\sigma>0$,这就是说,存在区间 $E_i\subset[a,b]$,虽然满足 $|E_i|<\frac{1}{i}$,但 E_i 不能被 $\{I_\lambda\}$ 中任一区间所包含.从每个 E_i 中取定一点 x_i,得一数列 $\{x_i\}$,因为 $\{x_i\}\subset[a,b]$,故能取出收敛的子列 $\{x_{k_i}\}$,它的极限 x 仍在 $[a,b]$ 中.因而存在开区间 $I\in\{I_\lambda\}$,使得 $x\in I$,故有 $\varepsilon>0$,使得 $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset I$,取 i 充分大,使得 $i>\frac{2}{\varepsilon}$,并且 $x_{k_i}\in\left(x-\frac{\varepsilon}{2},x+\frac{\varepsilon}{2}\right)$.于是 $|E_{k_i}|<k_i^{-1}<i^{-1}<\frac{\varepsilon}{2}$,对任一 $y\in E_{k_i}$ 我们有

$$|x-y|\leqslant|x-x_{k_i}|+|x_{k_i}-y|<\frac{\varepsilon}{2}+|E_{k_i}|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即 $y\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$,从而 $E_{k_i}\subset(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset I$,这是矛盾.

2. 不妨设 $b-a=1$,取 $n>\sigma^{-1}$,将区间 $[a,b]$ n 等分,这时每一个子区间的长度小于 σ,从 $\{I_\lambda\}$ 中可以选出 n 个开区间来,它们的并覆盖了 $[a,b]$.

问题 1.11

1. 显然 $l\leqslant L$.如果 $l=L$,那么 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l=L$,命题成立.今设 $l<L$,显然 $S\subset[l,L]$,余下只需证明 $S\supset[l,L]$.任取 $a\in(l,L)$,总可取 $\varepsilon>0$ 充分小,使得 $\left(a-\frac{\varepsilon}{2},a+\frac{\varepsilon}{2}\right)\subset(l,L)$ 从条件 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$ 便可证得 $\{x_n\}$ 有子列 $\{x_{k_n}\}$ 以 a 为极限.

2. 用反证法.若命题不成立,则必存在 N,当 $n\geqslant N$ 时有

$$n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)<1.$$

此即

$$\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n+1}}{n+1}>\frac{1}{n+1},n=N,N+1,\cdots$$

由此可得一串不等式,从这一串不等式即可导出矛盾.

3. (1) 用反证法.若命题不成立,则必存在 N,当 $n\geqslant N$ 时有

$$\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}<1$$

此即

$$\frac{x_1+x_{n+1}}{n+1}<\frac{x_n}{n}.$$

和上题一样,可由此导出矛盾.

(2) 为了说明 e 是最好的,取 $x_1=\varepsilon>0$ 待定,$x_n=n$,$n=2,3,\cdots$.于是

$$\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n=\left(\frac{\varepsilon+n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{\varepsilon+1}{n}\right)^n\to e^{1+\varepsilon}.$$

由于 ε 可取为任意小的正数,可见 e 是最大可能的常数.

问题 1.12

1. 先设 $q=1$. 这时递推公式为

$$x_{n+1}=x_n(1-x_n) \tag{1}$$

由此得 $0<x_{n+1}<x_n$,故 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,从(1)得 $a=0$. 再用 Stolz 定理,即可算得 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$. 如果 $q\in(0,1)$,命 $y_n=qx_n$ 即可化到上述情形.

2. 记 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$,所设条件为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nS_n=1$. 如果能证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n^3-S_{n-1}^3)=3$,那么由 Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(3n)a_n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^3}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^3-S_{n-1}^3}{3}=1,$$

问题就得到了证明. 所以问题归结为证明

$$\lim_{n\to\infty}(S_n^3-S_{n-1}^3)=3.$$

3. 注意到

$$\frac{\binom{n+1}{1}\binom{n+1}{2}\cdots\binom{n+1}{n}}{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}}=\frac{1}{n!}(n+1)^n,$$

并用两次 Stolz 定理.

4. 先证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则 $a=0$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 利用 Stolz 定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nx_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n^2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}\right)=\frac{1}{3},$$

即得所要证的结果.

5. 记 $x_n=\frac{y_n}{n}$,则 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$,先证 $\{x_n\}$ 收敛,再证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 用 Stolz 定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nx_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}\right)=\frac{1}{2}.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}y_n=2.$$

第 2 章　函数的连续性

问题 2.3

1. 在等式中命 $x=y=0$,立得 $f(0)=0$,由此可得 $0=f(0)=f(x+(-x))=f(x)+$

$f(-x)$，即 $f(-x)=-f(x)$，故只须讨论 $x>0$ 的情形．由于 $f(2)=f(1+1)=f(1)+f(2)=2f(1)$，一般可得 $f(n)=nf(1)$，现设 $x=\frac{n}{m}$ 是一个正有理数，那么 $n=mx$，$f(n)=f(mx)=mf(x)$，所以

$$f(x)=\frac{1}{m}f(n)=\frac{n}{m}f(1)=xf(1).$$

2．命 $a=k^{\frac{1}{T}}$，$\varphi(x)=f(x)a^{-x}$ 即得．

3．(1) 在数轴上，x 关于 a 对称的点 y 满足 $x+y=2a$，即 $y=2a-x$，同理 x 关于 b 对称的点是 $2b-x$，依条件

$$f(2a-x)=f(x)=f(2b-x)$$

即　$f(2a-x)=f(2a-x+2(b-a))$，命 $y=2a-x$，即得

$$f(y)=f(y+2(b-a)),y\in\mathbf{R}$$

(2) 因为 f 的图像关于直线 $x=a$ 对称，故有

$$f(x)=f(2a-x)$$

对一切 x 成立．由于 f 的图像关于点 (b,y_0) 中心对称，所以有

$$f(x)+f(2b-x)=2y_0$$

对一切 x 成立．由此可得

$$f(2a-x)+f(2b-x)=2y_0$$

对一切 x 成立．由此便可推出 f 是以 $4(b-a)$ 为周期的周期函数．

(3) 由条件可得

$$f(a+x)+f(a-x)=2y_0,$$
$$f(b+x)+f(b-x)=2y_1.$$

现取 $c=\frac{y_1-y_0}{b-a}$，$\varphi(x)=f(x)-cx$，那么 φ 是以 $(2b-a)$ 为周期的周期函数．

问题 2.5

1．任取 $a,b\in(0,+\infty)$，由条件可得

$$f(a)=f(2^na),f(b)=f(2^nb),n=1,2,\cdots.$$

让 $n\to\infty$ 即得 $f(a)=f(b)$．

2．在 $f(ax)=bf(x)$ 中命 $x=0$，即得 $f(0)=0$．由条件可得

$$f(a^nx)=b^nf(x),n=1,2,\cdots.\tag{1}$$

等式(1)连同 f 在 $x=0$ 近旁有界，即可推出

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0).$$

3．设 f 与 g 的周期分别为 T_1 与 T_2，于是对任意固定的 x，

$$0=\lim_{n\to\infty}(f(x+nT_1)-g(x+nT_1))=\lim_{n\to\infty}(f(x)-g(x+nT_1))$$

由此得

$$\lim_{n\to\infty}g(x+nT_1)=f(x)$$

同理，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x+nT_2)=g(x)$，由此便可证得 $f(x)=g(x)$．

问题 2.6

1. 由题设,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<|x|<\delta$ 时有

$$f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)=x\beta(x),x\neq 0,$$

其中 $|\beta(x)|<\varepsilon$. 由此可得

$$f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{x}{2^{k-1}}\beta\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right),k=1,2,\cdots.$$

由此便可得

$$|f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)|<2|x|\varepsilon.$$

让 $n\to\infty$ 即得所要证的结果.

2. 在 $(0,+\infty)$ 上定义

$$f(x)=\prod_{i=1}^{[x]+1}(1+|f_i(x)|),$$

它可具体地表示为

$$f(x)=\begin{cases}1+|f_1(x)|, & x\in(0,1),\\(1+|f_1(x)|(1+|f_2(x)|, & x\in[1,2),\\(1+|f_1(x)|(1+|f_2(x)|)(1+|f_3(x)|), & x\in[2,3),\\ \cdots\cdots\end{cases}.$$

容易证明它符合题中的要求.

问题 2.7

1. 利用等式

$$\max(f(x),g(x))=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$$

$$\min(f(x),g(x))=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$$

2. 由假定,f 在 (a,b) 中每一点 x_0 处的左右极限都是存在的,只需证明 $f(x_0+)-f(x_0-)=f(x_0)$.

3. (1) 利用条件 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,从 f 在一点 x_0 处连续可推出 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,再用练习题 2.7 中第 10 题的结论.

(2) 在问题 2.3 的第 1 题中已经证明 $f(x)=f(1)x$ 对一切有理数 x 成立,由此根据 f 的单调性,即可证得 $f(x)=f(1)x$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 成立.

4. 取 $x_0\in\mathbf{R}$ 使得 $f(x_0)\neq 0$,于是

$$0\neq f(x_0)=f(x+x_0-x)=f(x)f(x_0-x),$$

由此知 f 在 $\mathbf{R}$ 上处处不为 0. 再由

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)>0$$

知 f 恒取正值. 在等式 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 两边取对数,并对 $\ln f$ 用第 3 题(1)的结果.

5. 对任何 $x,y\in(0,+\infty)$，存在 u,v，使得 $x=e^u$，$y=e^v$，这时条件变为

$$f(e^{u+v})=f(e^u)f(e^v).$$

若命 $g(t)=f(e^t)$，上式可写为

$$g(u+v)=g(u)g(v).$$

这样便把问题转化为第 4 题的情形

6. 先证明 $f(y^n)=(f(y))^n$，函数方程变为

$$f(x+y^n)=f(x)+f(y^n),$$

再命 $y^n=z$，得 $f(x+z)=f(x)+f(z)$，这样就化到第 3 题的情形.

7. 容易证明 f 是偶函数. 由条件可得

$$f(x)=f(x^{1/2^n}),n=1,2,\cdots$$

所以 $f(x)=f(1)$，再证 $f(1)=f(0)$即得.

问题 2.9

1. 由假定，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，凡是 $x,y\in[0,+\infty]$且满足 $|x-y|<\delta$，便有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$. 取定充分大的 k，使得 $\frac{1}{k}<\delta$. 现在把$[0,1]k$ 等分，设其分点为 $x_i=\frac{i}{k}$，$i=0,1,\cdots,k$，每个小区间的长度小于 δ. 对于任意 $x>1$，$x-[x]\in[0,1)$，故必有 x_i，$i\in\{0,1,\cdots,k\}$，使得 $|x-[x]-x_i|<\delta$. 对每个 x_i 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_i+n)=0$. 故存在 N，当 $n>N$ 时，$|f(x_i+n)|<\frac{\varepsilon}{2}$对 $i=0,1,\cdots,k$ 都成立. 于是当 $x\geqslant N+1$ 时，便有

$$|f(x)|\leqslant|f(x_i+[x])|+|f(x)-f(x_i+[x])|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

仅有 f 的连续性，推不出上面的结论，函数 $f(x)=\frac{x}{1+x^2\sin^2x}$便是这样一个例子.

2. 只要证明对充分大的 $A>a$，$\frac{f(x)}{x}$在$[A,+\infty]$上一致连续就行了.

问题 2.10

1. 用反证法. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)\neq\infty$，那么存在常数 $A>0$ 及趋于∞的数列$\{x_n\}$，使得

$$|f(x_n)|\leqslant A,n=1,2,\cdots.$$

这表示$\{f(x_n)\}\subset[-A,A]$，由定理 2.26 的推论，$\{f(f(x_n))\}$也落在一有界区间中，这与 $\lim\limits_{n\to\infty}f(f(x))=\infty$相矛盾.

2. 命 $F(x)=g(x)-f(x)$，则 $F(x_n)=f(x_{n+1})-f(x_n)$. 由介值定理，存在 $\xi_n\in[a,b]$，使得

$$F(\xi_n)=\frac{1}{n}(F(x_1)+\cdots+F(x_n))=\frac{1}{n}(f(x_{n+1})-f(x_n)).$$

$\{\xi_n\}$有子列 $\xi_{k_n}\to x_0\in[a,b]$，代入上式得

$$F(\xi_{k_n})=\frac{1}{k_n}(f(x_{k_n+1})-f(x_{k_n})).$$

让 $n\to\infty$,即得 $F(x_0)=0$.

3. 用反证法.如果结论不成立,则必存在某个 $\lambda>0$ 和正整数 N,对一切 $x\geqslant N$ 均有

$$|f(x+\lambda)-f(x)|\geqslant\frac{1}{N}.$$

由零值定理知道,这时只能是 $f(x+\lambda)-f(x)\geqslant\frac{1}{N}$ 对所有 $x\geqslant N$ 成立,或者 $f(x+\lambda)-f(x)\leqslant-\frac{1}{N}$ 对一切 $x\geqslant N$ 成立.由此便可推出 f 无界的结论。

4. (1) 如果存在这样的 f,那么必有 $a<b$,使得 $f(a)=f(b)$,但对任意 $x\in(a,b)$ 必有 $f(x)\neq f(a)$.不妨设对所有 $x\in(a,b)$ 均有 $f(x)>f(a)$.取 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)=M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$.由假定,一定还有 x_1(不妨 $x_1>x_0$),使得 $f(x_1)=f(x_0)=M$.如果 $x_1\in(a,b)$,那么由图 $F2-1$ 可看出,f 在四个不同的点上取相同的值.如果 x_1 在(a,b)之外,那么 f 在三个不同的点上取相同的值(见图 $F2-2$).

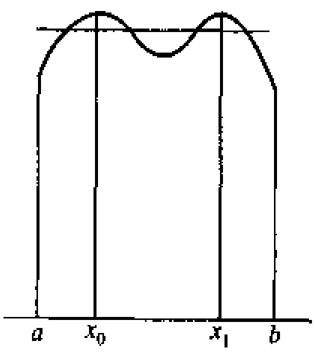

图 $F2-1$

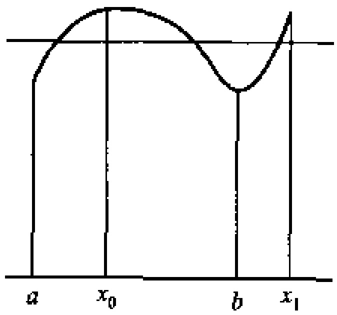

图 $F2-2$

(2) 这样的函数是存在的,具体构造见图 $F2-3$:

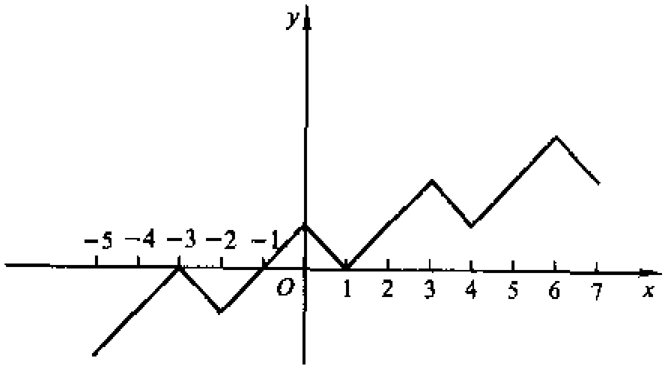

图 $F2-3$

第3章 函数的导数

问题 3.1

1. 从§2.4的例8知道，Riemann函数在有理点处不连续，当然不可导，余下只要证明Riemann函数在无理点不可导. 设 a 是任一无理数，在它的近旁有无穷多个无理数，故若 $R'(a)$ 存在，必有 $R'(a)=0$，由此即可导出矛盾.

2. Dirichlet函数就是这样的函数.

问题 3.2

1. 由导数的定义并注意到 $f(0)=0$，可得

$$f(x)=xf'(0)+o(x),x\to 0$$

由此可得

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)=f'(0)\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k+o(1).$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{f'(0)}{2}$$

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n^2}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n^2}\right)=\sqrt{e}$

2. (1) 在等式 $(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ 两端求导并让 $x=1$.

(2) 对上面的等式求二次导数，并利用(1)的结果.

3. 求出和式 $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx$，$\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx$ 后再求导数.

4. 命 $\varphi(x)=f(x)-mx-f(0)$，那么 $\varphi(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$，所以 φ 在 $x=0$ 处连续. 但是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(2x)-\varphi(x)}{x}=0$$

即 $\varphi(2x)-\varphi(x)=o(x)$，$x\to 0$. 由问题2.6第1题的结果知 $\varphi(x)=o(x)$，即 $f'(0)=m$.

5. 如果这样的 f 存在，我们来求 $f\circ f$ 的不动点，即满足 $f\circ f(x)=x$ 的 x. 由假设 $x=-x^3+x^2+1$ 由此得 $x=1$，这表明 $f\circ f$ 有惟一的不动点 $x=1$. 今设 $f(1)=a$，那么 $f(f(1))=f(a)=1$，因而 $f(f(a))=f(1)=a$，这说明 a 也是 $f\circ f$ 的不动点，因而 $a=1$，即 $f(1)=1$. 在等式

$$f(f(x))=-x^3+x^2+1$$

两边求导得 $f'(f(x))f'(x)=-3x^2+2x$，让 $x=1$ 即得

$$(f'(1))^2=-1,$$

这是不可能的.

6. 和上题的解法一样.

问题 3.3

1. 在恒等式

$$(1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k$$

两端对 x 求导后用 $x=1$ 代入得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k=0.$$

其他各式用同样的方法可得.

2. 用归纳法可证

$$(uvw)^{(n)}=\sum_{i+j+k=n}\frac{n!}{i!\ j!\ k!}u^{(i)}v^{(j)}w^{(k)}.$$

上式右边是对一切适合 $i+j+k=n$ 的非负整数组(i,j,k)求和,共有$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$个加项

3. 用数学归纳法.

4. 用数学归纳法.

5. 容易算得

$$\frac{f_n^{(n)}(x)}{n!}=\frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+\frac{1}{n},n=1,2,\cdots$$

由这递推公式便可得

$$\frac{f_n^{(n)}(x)}{n!}=\ln x+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

命 $x=\frac{1}{n}$并让 $n\to\infty$,即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}=\gamma,$$

这里 γ 是 Euler 常数.

6. 设 $p(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_n),a_1,\cdots a_n$ 都是实数,不等式对 $x=a_i(i=1,\cdots n)$显然成立.对于 $x\neq a_i$ 有

$$\frac{p'(x)}{p(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-a_i},$$

再求一次导数即得要证的不等式.

7. 对 n 行数学归纳法.$y=\arctan x,x=\tan y$,故

$$y'=f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\cos^2 y=\cos y\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$$

$n=1$ 时等式成立.从 $n=k$ 成立推出 $n=k+1$ 成立,只要注意到 $y'=\cos^2 y$ 便不难完成.

8. $(e^x\cos x)^{(n)}=\sqrt{2}^n e^x\cos\left(\frac{n\pi}{4}+x\right)$,

$$(e^x\sin x)^{(n)}=\sqrt{2}^n e^x\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right).$$

9. 命 $z=(1-\sqrt{x})^{2n+2}$，则 $z^{(n)}(1)=0$.
由二项式定理

$$y+z=2\sum_{k=0}^{n+1}\binom{2n+2}{2k}x^k.$$

由此即得

$$y^{(n)}(1)=4(n+1)(n+1)!$$

问题 3.4

1. 命 $F(t)=f(\tan t),G(t)=g(\tan t),t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，定义

$$F\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{t\to-\frac{\pi}{2}+}f(\tan t)=f(-\infty),$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}f(\tan t)=f(+\infty)$$

类似地定义 $G\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g(-\infty),G\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(+\infty)$. 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上对 F 与 G 用 Cauchy 定理.

2. 设 $x_1<x_2$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$，由条件知 $g(x_1)\neq0,g(x_2)\neq0$. 如果 g 在(x_1,x_2)中没有零点，对函数 $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$用 Rolle 定理即得矛盾.

3. 注意

$$q(x)=(xp(x)+p'(x))(xp'(x)+p(x)),$$

记

$$f(x)=xp(x)+p'(x),g(x)=xp'(x)+p(x).$$

我们有

$$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}}p(x))',g(x)=(xp(x))'.$$

设 p 的 n 个大于 1 的不同的实根为

$$1<a_1<a_2<\cdots<a_n$$

对 $e^{\frac{x^2}{2}}p(x)$用 Rolle 定理，便知 f 至少有 $n-1$ 个实零点 $b_i:a_i<b_i<a_{i+1},i=1,\cdots,n-1$. 类似地，$g$ 至少有 n 个实零点 $0<c_0<c_1<\cdots<c_{n-1}$，其中 $c_0\in(0,1),a_i<c_i<a_{i+1}$. 现在证明 $b_i\neq c_i(i=1,\cdots,n-1)$. 用反证法，如果 $b_i=c_i=r>1$，我们有 $f(r)=0$，也就是 $p'(r)=-rp(r)$，此外，$g(r)=0$，即 $p(r)=-rp'(r)$. 由此得到$(r^2-1)p(r)=0$，即 $p(r)=0$. 这和 a_i 和a_{i+1}是 p 的相邻零点相矛盾. 所以 $b_1,\cdots,b_{n-1}$和 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$是 q 的 $2n-1$ 个互不相同的邻点.

4. 可用归纳法证明 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}c_ke^{kx}$至多只能有 $n-1$ 个不同的零点.

5. 先在$\left[a,a+\frac{1}{2}\right]$中用中值定理，根据给定的条件证明 f 在$\left[a,a+\frac{1}{2}\right]$中为 0. 由于 $f\left(a+\frac{1}{2}\right)=0$，把 $a+\frac{1}{2}$当作 a，可推出 f 在$[a,a+1]$上为零，再一步一步往前推，可知 f 在$[a,+\infty)$中为零.

6. 命 $\varphi(x)=\frac{x}{1+x^2}-f(x)$，$x\geqslant 0$，则 $\varphi\geqslant 0$，$\varphi(0)=0$，$\varphi(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$. 如果 $\varphi=0$对 $x\geqslant 0$ 成立，结论显然成立. 否则一定有正数 ξ，使 $\varphi(\xi)$是 φ 的最大值，故 $\varphi'(\xi)=0$，这正是 $f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

问题 3.5

1. 由定义，对任何 $x_1<x_2<x$，有不等式

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2},\tag{1}$$

当 $x\to x_2+$时，$\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$递减有下界，故 f 在x_2 处存在有限的右导数，同理 f 在x_2 处也存在左导数. 在(1)两端分虽令 $x_1\to x_2-$ 及 $x\to x_2+$，便得$f'_-(x_2)\leqslant f'_+(x_2)$. 显然，它们都是递增的.

(2) 当 $x<x_0$ 时，$f'_+(x)\leqslant f'_-(x_0)$. 由于 f'_+ 在 x_0 处左连续，因而有 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f'_+(x)\leqslant f'_-(x_0)$，由(1)$f'_-(x_0)\leqslant f'_+(x_0)$，故 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$，即 f 在x_0 处可导.

(3) 设 $a<x_1<x_2<b$，由 f 的凸性可知

$$\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(b)-f(x_2)}{b-x_2},$$

但是

$$\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}\geqslant f'_+(a),\quad \frac{f(b)-f(x_2)}{b-x_2}\leqslant f'_-(b)$$

可见对上述的 x_1,x_2，$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$是有界的，即存在常数 M，使得

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant M|x_2-x_1|$$

对一切 $x_1,x_2\in[a,b]$成立.

2. 必要性：取 $a\in[f'_-(c),f'_+(c)]$即得.

充分性，设 $c\in(x_1,x_2)$，于是

$$\frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c}\geqslant a\geqslant\frac{f(x_1)-f(c)}{x_1-c},$$

这表明 f 是 I 上的凸函数.

3. 利用上题的结果，取 $a=f'(c)$.

4. 由题设立刻可得 $f(0)=0$，$x>0$ 时，$f(x)>0$. 用反证法即可证得(1)，(2)，为证(3)，从题设得

$$\frac{\ln x}{f(x)}=1+\frac{\ln f(x)}{f(x)},$$

只要证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{f(x)}=0$$

即可.

5. 先证一个引理:如果多项式 p 使得 $p\pm p'\geqslant 0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上成立,那么必有 $p\geqslant 0$. 这是因为从 $p\pm p'\geqslant 0$ 可以断言 p 必然是一个首项系数为正值的偶次多项式,因而

$$\lim_{x\to\pm\infty}p(x)=+\infty.$$

因此 p 必有最小值点 x_0,这时必有 $p'(x_0)=0$. 于是

$$p(x)\geqslant p(x_0)=p(x_0)+p'(x_0)\geqslant 0$$

对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 成立.

回到本题,由

$$p'''-p''-p'+p=(p-p'')-(p-p'')'\geqslant 0$$

可得 $p-p''\geqslant 0$,再反复利用上面的引理即得.

6. 利用 $-\ln x$ 是凸函数这一事实即得.

7. 设有两个解 y_1,y_2,命 $y=y_1-y_2$,那么 y 满足

$$\begin{cases}y''+p(x)y'+g(x)y=0,\\ y(a)=y(b)=0,\end{cases}$$

由此即可导出 $y(x)=0,x\in[a,b]$.

8. (1) 对 n 行数学归纳法.

(2) 左端不等式用数学归纳法,右端不等式展开 $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ 即得.

(3) 利用上面两个不等式.

9. 命

$$g(x)=f(x)-\left(f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)$$

只要证明 $g(x)=0,x\in[a,b]$. 定义

$$\varphi(x)=\pm g(x)+\varepsilon(x-a)(x-b),\quad \varepsilon>0.$$

直接验算可知

$$D^2\varphi=\pm D^2g+2\varepsilon=\pm D^2f+2\varepsilon=2\varepsilon>0.\tag{1}$$

现在证明 φ 在 (a,b) 中不能取最大值,如果它在某点 $x_0\in(a,b)$ 取到最大,那么

$$\begin{aligned}&\frac{\varphi(x_0+h)+\varphi(x_0-h)-2\varphi(x_0)}{h^2}\\ =&\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)+\varphi(x_0-h)-\varphi(x_0)}{h^2}<0\end{aligned}$$

因而 $D^2\varphi(x_0)\leqslant 0$,这与(1)矛盾,这说明 φ 的最大值只能在 (a,b) 的两个端点 a,b 处达到,而 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$,故 φ 在 (a,b) 中取正值,由此即可证明 $g(x)\equiv 0$.

10. 用数学归纳法. $n=1$ 时命题成立. 记

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}.$$

设 $S_{n-1}(x)>0$ 在$(0,\pi)$上成立.由于 $S_n(0)=S_n(\pi)=0$,如果 $S_n(x)$在$(0,\pi)$中有取负值的点,那么 $S_n(x)$在$[0,\pi]$上的最小值为负值,这取最小值的点必在$(0,\pi)$中.设 x_0 使 $S_n(x)$取最小值.于是 $S_n'(x_0)=0$.因而

$$\begin{aligned}0&=2\sin\frac{x_0}{2}S_n'(x_0)=\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x_0}{2}\cos kx_0\\&=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x_0-\sin\frac{x_0}{2}.\end{aligned}$$

所以

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)x_0=\frac{x_0}{2}+2k\pi \tag{1}$$

或

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)x_0=-\frac{x_0}{2}+(2k+1)\pi. \tag{2}$$

由于

$$\sin nx_0=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x_0\cos\frac{x_0}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x_0\sin\frac{x_0}{2}, \tag{3}$$

把(1)和(2)分别代入(3)便得 $\sin nx_0=0$ 或 $\sin nx_0=\sin x_0>0$.于是根据归纳假设

$$S_n(x_0)=S_{n-1}(x_0)+\frac{\sin nx_0}{n}>0.$$

这与假设矛盾.

11. 先设 $f'(a)f'(b)<0$,不妨设 $f'(a)>0,f'(b)<0$.这时函数 f 在 a 的右边是递增的,而在 b 的左边是递减的,因此 f 必在(a,b)中的某点 c 取得最小值或最大值,因而 $f'(c)=0$.现任取 r 使得$f'(a)<r<f'(b)$(或 $f'(b)<r<f'(a)$),考虑函数

$$g(x)=f(x)-rx,$$

此时 $g'(a)=f'(a)-r<0,g'(b)=f'(b)-r>0$,应用刚才证明的结论,存在 $c\in(a,b)$,使得 $g'(c)=0$,即 $f'(c)=r$.

根据上面的结论即知 f'无第一类间断点.

第 4 章　一元微分学的顶峰——Taylor 定理

问题 4.2

1. 从

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

可得$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$的展开式.由此可得

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ \dfrac{e}{2}, & x=2.\end{cases}$$

2. 用与上题同样的方法，将$\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$按$1,\frac{1}{n},\frac{1}{n^2},\frac{1}{n^3},\frac{1}{n^4}$展开，由此可算得结果.

3. 因为

$$-\ln(1-x)^2=-2\ln(1-x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2x^k}{k}+o(x^n),(x\to 0),$$

另一方面

$$-\ln(1-x)^2=-\ln(1-2x+x^2)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(2x-x^2)^k}{k}+o(x^n),(x\to 0)$$

两式相减得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}((2x-x^2)^k-2x^k)=o(x^n),x\to 0.$$

上式表明左端的多项式中不含$1,x,\cdots,x^n$中各项，因此能被x^{n+1}所整除.

问题 4.3

1. 由于

$$\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_n h)-f^{(n)}(x_0)}{h}=\frac{n!}{h^{n+1}}\left\{f(x_0+h)-f(x_0)-\cdots\right.$$
$$\left.-\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1}-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)\right\}$$

让$h\to 0$，上式左端趋向于$f^{(n+1)}(x_0)\lim\limits_{h\to 0}\theta_n$，右端通过 L'Holspital 法则得极限为$\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x_0)$，由于$f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$，即得$\lim\limits_{n\to 0}\theta_n=\frac{1}{n+1}$.

2. 利用 Taylor 展开

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,\quad \xi\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right),$$
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{1}{2}f''(\eta)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,\quad \eta\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$$

两式相减易得相应的结果.

3. 存在$x_1\in(0,1)$，使得$f(x_1)=-1$，因此$f'(x_1)=0$. 用 Taybr 定理，

$$f(0)=f(x_1)+\frac{x_1^2}{2}f''(\xi_1),\quad \xi_1\in(0,x_1),$$
$$f(1)=f(x_1)+\frac{1}{2}(1-x_1)^2f''(\xi_2),\xi_2\in(x_1,1).$$

由此得

$$x_1^2f''(\xi_1)=(1-x_1)^2f''(\xi_2)=2,$$

即

$$f''(\xi_1)f''(\xi_2)(x_1(1-x_1))^2=4.$$

所以$f''(\xi_1)f''(\xi_2)\geqslant 8^2$，故总有一个$\xi$，使得$f''(\xi)\geqslant 8$.

4. 先用中值公式再用 Taylor 定理可得

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1},$$

另一方面

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)+\frac{f^{(n)}(\eta)}{n!}h^{n-1}.$$

比较上面两式并让 $h\to 0$ 即得所要的结果.

5. 由 Taylor 定理

$$e^x=P_n(x)+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}>0.$$

由此易知(1)成立.当 n 为奇数时,$P_n'=P_{n-1}>0$,故 P_n 严格递增,由于 $\lim\limits_{n\to\pm\infty}P_n(x)=\pm\infty$,故(2)成立.

(3) 设 $P_{2n+1}(x)=0$ 的惟一实根为 x_n.首先证明 $\{x_n\}$ 严格递减.为此,利用等式

$$P_{2n+3}(x)=P_{2n+1}(x)+\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1+\frac{x}{2n+3}\right), \tag{1}$$

用数学归纳法证明 $x_n>-(2n+3)$.于是由(1)得

$$P_{2n+3}(x_n)>0.$$

由于 $P_{2n+3}(x_{n+1})=0$,利用 P_{2n+3} 的严格递增性即知 $x_n>x_{n+1}$.再用反证法证明 $\{x_n\}$ 没有下界.

6. 对一切 $x\in(0,2)$,用 Taylor 定理

$$f(0)=f(x)-xf'(x)+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

$$f(2)=f(x)+(2-x)f'(x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(2-x)^2,$$

两式相减即得.考察函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+1$ 即知常数 2 是最小的.

7. 对任何 $x\in\mathbf{R}$ 及 $h>0$,由 Taylor 公式

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi)}{2}h^2,$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\eta)}{2}h^2,$$

两式相减即可得

$$2hM_1\leqslant 2M_0+M_2h^2$$

对一切 $h>0$ 成立,实际上它对 $h\leqslant 0$ 也成立,即

$$M_2h^2-2M_1h+2M_0\geqslant 0$$

对一切 $h\in\mathbf{R}$ 成立.由此即得 $M_1^2\leqslant 2M_0M_2$.

第 5 章　插值与逼近初步

问题 5.1

1. 由插值公式可知

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}p(x_i)L_i(x).$$

比较上式中双方最高次项的系数得

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{p(x_i)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}=1.$$

如果$|p(x_i)|<\frac{n!}{2^n}$, $i=0,1,\cdots,n$,由上式就可导出矛盾.

2. 从小到大依次排列 $2n+1$ 个插值节点

$$-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n$$

用 $L_i(x)$表示 Lagrange 基函数,$p(x)$可表示为

$$p(x)=\sum_{i=0}^{2n}p(i-n)L_i(x),$$

由题设条件$|p(x)|\leqslant\sum_{i=0}^{n}|L_i(x)|$,由此可得所要的结论.

第 7 章 函数的积分

问题 7.1

1. 因为 f 在$[a,b]$上可积,所以可取一特殊的分割来讨论.作分割使$\frac{a+b}{2}$是一个分点,其他分点关于$\frac{a+b}{2}$对称,值点也关于这一点对称.利用函数的凸性即可证得所要的不等式.

问题 7.2

1. 利用不等$(1-x^2)^n\geqslant1-nx^2(0\leqslant x\leqslant1)$和

$$\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-x^2)^n\mathrm{d}x.$$

2. 只要证明 f 在(a,b)中的变号点多于 n 个.今若 f 在(a,b)中的全部变号点为 $x_1<x_2<\cdots<x_k$,其中 $k\leqslant n$,命

$$p(x)=(x_1-x)(x_2-x)\cdots(x_k-x),$$

那么

$$\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x>0.$$

但由所给条件$\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x=0$.这就产生了矛盾.

3. 不妨设 $M>0$,存在 $\xi\in[a,b]$,使 $f(\xi)=M$.于是对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在$[c,d]\subset[a,b]$,使得 $f(x)\geqslant M-\varepsilon$ 对 $x\in[c,d]$成立,因而

$$\left(\int_a^b f^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\geqslant\left(\int_c^d f^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\geqslant(M-\varepsilon)(d-c)^{\frac{1}{n}}.\tag{1}$$

另外显然有

$$\left(\int_a^b f^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant M(b-a)^{\frac{1}{n}},\tag{2}$$

对(1)取 $n\to\infty$ 的下极限,再让 $\varepsilon\to0$,对(2)取 $n\to\infty$ 的上极限就得要证的.

4. 对于任给的 $\varepsilon>0$,

$$\int_a^b f^p(t)\mathrm{d}t>\int_{b-\varepsilon}^b f^p(t)\mathrm{d}t>f^p(b-\varepsilon)\varepsilon. \tag{1}$$

由于 $f(b-\varepsilon)>f(b-2\varepsilon)$,故存在 $A>0$,当 $p>A$ 时,

$$\left(\frac{f(b-\varepsilon)}{f(b-2\varepsilon)}\right)^p>\frac{b-a}{\varepsilon},$$

即 $f^p(b-\varepsilon)\varepsilon>(b-a)f^p(b-2\varepsilon)$. 代入(1)得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(t)\mathrm{d}t>f^p(b-2\varepsilon),$$

即 $f^p(x_p)>f^p(b-2\varepsilon)$,由此得 $x_p>b-2\varepsilon$,因而

$$b-2\varepsilon<x_p<b.$$

所以 $\lim\limits_{p\to+\infty}x_p=b$.

5. 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$,要证 $a_0=(n+1)^2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. 由假设 $\frac{a_0}{k+1}+\frac{a_1}{k+2}+\cdots+\frac{a_n}{k+n+1}=0,k=1,2,\cdots,n$. 上式右端通分得

$$\frac{Q(k)}{(k+1)\cdots(k+n+1)}=0,k=1,\cdots,n,$$

其中 Q 是 k 的 n 次多项式,且以 $k=1,\cdots,n$ 为零点,因而可写 $Q(k)=c(k-1)\cdots(k-n)$. 在等式

$$\frac{c(k-1)\cdots(k-n)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)}=\frac{a_0}{k+1}+\frac{a_1}{k+2}+\cdots+\frac{a_n}{k+n+1}$$

两端乘 $k+1$ 后再命 $k=-1$,即得 $a_0=c(-1)^n(n+1)$. 再在等式

$$\int_0^1 f(x)x^k\mathrm{d}x=\frac{Q(k)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)}$$

中命 $k=0$ 得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=c\,\frac{(-1)^n}{n+1}=\frac{a_0}{(n+1)^2},$$

于是　$a_0=(n+1)^2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

问题 7.3

1. (1) 由 Cauchy - Schwarz 不等式

$$\left(\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right)^2\leqslant(x-a)\int_a^x (f'(t))^2\mathrm{d}t,$$

再用 Newton - Leibniz 公式.

(2) 利用上面的不等式.

2. f 在$(0,1)$中保持定号,不妨设 $f(x)>0,x\in(0,1)$. 设 f 在 $c\in(0,1)$上取得最大值 A,即 $A=f(c)$. 由中值定理

$$\frac{A}{c}=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=f'(a),\qquad a\in(0,c),$$

$$\frac{-A}{1-c}=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=f'(b),\quad b\in(c,1).$$

由不等式

$$\int_0^1\frac{|f''(x)|}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant\int_c^b\frac{|f'(x)|}{f(x)}\mathrm{d}x$$

即可导出所要的结果.

3. 命

$$F(t)=\int_a^t xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x,$$

证明 F 在$[a,b]$中递增.

4. 命 $f(x)=-\frac{1}{x}$,利用上题的结果.

也可不用上题结果直接证. 因为 $f(x)=\frac{1}{x}$ 是$(0,+\infty)$上的凸函数,在点$\left(\frac{a+b}{2},\frac{2}{a+b}\right)$上作$y=f(x)$的切线. 比较由 $y=f(x)$,$x=a$,$x=b$,x 轴围成的面积和由切线,$x=a$,$x=b$,x 轴围成的面积.

5. 命

$$F(t)=\left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^t f^3(x)\mathrm{d}x,$$

证明 F 在$[0,1]$上是递增的.

6. 当 $x\in[0,1]$时,$\mathrm{e}^{-x}\leqslant 1$,并利用等式

$$(\mathrm{e}^{-x}f(x))'=\mathrm{e}^{-x}(f'(x)-f(x)).$$

7. f 在$[1,+\infty]$上严格递增,利用等式

$$f(x)=f(1)+\int_1^x f'(t)\mathrm{d}t.$$

问题 7.4

1. 对任何 $x>T$ 均可表为

$$x=m_xT+r_x,$$

其中 m_x 为正整数,$0\leqslant r_x\leqslant T$. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t&=\int_0^{m_xT}f(t)\mathrm{d}t+\int_{m_xT}^{m_xT+r_x}f(t)\mathrm{d}t\\&=m_x\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{r_x}f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

余下的证明是容易的.

2. 利用 $\sin^2 nt=\frac{1-\cos 2nt}{2}$,可得

$$I_{n+1}-I_n=\frac{1}{2n+1},$$

由此便知 $I_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$. 再由 Stolz 定理立得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{\ln n}=\frac{1}{2}.$$

3. $f(m,n)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\int_0^1 x^{m+k}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x$，作代换 $t=1-x$，即得 $f(m,n)=f(n,m)$，由上式反复利用分部积分可得

$$f(m,n)=\frac{m!\;n!}{(m+n+1)!}.$$

4. (1) 直接验算便知.

(2) 直接用 Leibniz 公式算出 $f^{(k)}(x)$，便知 $f^{(k)}(0)$和 $f^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)$为整数.

(3) 用分部积分并由(2)即知 $\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$ 为整数.另一方面，当 $0\leqslant x\leqslant\pi=\frac{a}{b}$时，

$$0<f(x)\leqslant\frac{\pi^n}{n!}\left(\frac{a}{4}\right)^n,$$

于是

$$0<\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi^{n+1}}{n!}\left(\frac{a}{4}\right)^n\to 0\quad(n\to\infty).$$

这个矛盾证明 π 不是有理数.

5. 用反证法，如果对一切 $x\in(0,1)$有 $|f(x)|<2^n(n+1)$，那么从等式 $1=\int_0^1 f(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\mathrm{d}x$ 即可导出矛盾.

6. 作三次多项式 $p(x)=x^3-x^2$，它也满足 $p(0)=p(1)=p'(0)=0,p'(1)=1$，而此时

$$\int_0^1(p''(x))^2\mathrm{d}x=4,$$

因此只要证明

$$\int_0^2(f''(x))^2\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1(p''(x))^2\mathrm{d}x.$$

等号成立当且仅当 $f=p$.

问题 7.5

1. 由于对一切 $x\in[0,1]$有 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M$，所以

$$(M-f(x))\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{f(x)}\right)\geqslant 0,$$

即

$$\frac{M}{m}+1\geqslant\frac{f(x)}{m}+\frac{M}{f(x)},$$

两边在[0,1]上积分并用几何平均—算术平均不等式.

2. 已知

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

其中第一项为偶函数，第二项为奇函数.由假设条件即可推出 f 是奇函数.

3. 令 $h(t)=M+k\int_0^t|x(t)|\mathrm{d}t$,题设为 $|x(t)|\leqslant h(t)$ 但是 $h'(t)=k|x(t)|$,所以 $h'(t)\leqslant kh(t)$,此即

$$(e^{-kt}h(t))'\leqslant 0,$$

由此可得所要的结论.

问题 7.6

1. $f_a(x)=h(x)+g(x)$,其中

$$h(x)=-\left(\frac{a}{x}-\left[\frac{a}{x}\right]\right),\quad g(x)=a\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)$$

由于

$$\int_0^a h(x)\mathrm{d}x=-a\int_0^1\left(\frac{1}{t}-\left[\frac{1}{t}\right]\right)\mathrm{d}t=-\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t,$$

所以

$$\int_0^1 f_a(x)\mathrm{d}x=\int_a^1 h(x)\mathrm{d}x=a\ln a.$$

2. 必要性是明显的,今证充分性.由于 f 在$[a,b]$上可积,它在$[a,b]$的任何子区间上也可积,因而每一子区间上必有 f 的连续点.对于任何分割,取每一值点为 f 的连续点,这样所得的 Riemann 和为 0,因而积分也为 0.

问题 7.8

1. (1) 从下面的图中可以看出

$$f(a_1)-f(a_2)+f(a_3)-f(a_4)+f(a_5)$$

表示图中画有斜线的三块面积之和,这里已经用了 Newton – Leibniz 公式和 $f(0)=0$ 的条件,而

$$f(a_1-a_2+a_3-a_4+a_5)$$

等于直线 $x=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5$ 与 x 轴,y 轴和曲线 $y=f'(x)$所围的面积.从面积比较显然可以看出

$$f(a_1-a_2+a_3-a_4+a_5)\leqslant f(a_1)-f(a_2)+f(a_3)-f(a_4)+f(a_5).$$

容易看出,这里的推理对 n 为偶数也成立.

(2) 取 $f(x)=x^2$.

2. 记要计算的极限为 I,则

$$I=\int_0^1\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k+\frac{1}{2}}}+\int_{\frac{1}{k+\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{k}}\right)$$

由于

$$\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k+\frac{1}{2}}}\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{2k+1}-\frac{1}{k+1},$$

$$\int_{\frac{1}{k+\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{k}}\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x=0,$$

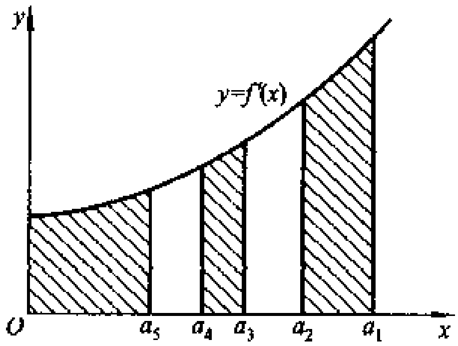

图 F7－1

所以

$$I = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right)$$
$$=2\ln 2-1.$$

3．按题意，$y=f(x)$的图形如图 F7－2 所示，所以 $0\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\Delta abc$ 的面积．写出切线 ac，bc 的方程，即可写出 c 点的坐标，从而可算出 Δabc 的面积，即得所要的不等式．

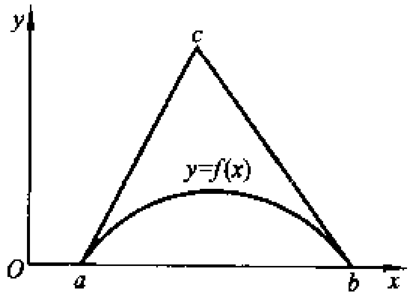

图 F7－2

问题 7.9

1．从题中所给的两个不等式可得

$$\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x<\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$$

即

$$\sqrt{n}\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x<\int_0^{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\leqslant\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}\theta\mathrm{d}\theta,$$

让 $n\to\infty$，用练习题 7.9 第 2 题和 Wallis 公式即得

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2．S_n 可写为

$$
\begin{aligned}
S_n &= 1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-1)\cdots(n-k)}{(n+2)\cdots(n+k+1)}\\
&=1+\frac{1}{\binom{2n}{n-1}}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{n+k+1}\\
&=1+\frac{1}{\binom{2n}{n-1}}\left\{\binom{2n}{n+2}+\binom{2n}{n+3}+\cdots+\binom{2n}{2n}\right\}\\
&=1+\frac{1}{\binom{2n}{n-1}}\left\{\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}-2\binom{2n}{n-1}-\binom{2n}{n}\right\}\frac{1}{2}\\
&=\frac{1}{2}\frac{1}{\binom{2n}{n-1}}2^{2n}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

由此可知

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{n}}&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\binom{2n}{n-1}}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!\ (n+1)!\ 2^{2n}}{(2n)!\ \sqrt{n}}.
\end{aligned}
$$

最后用 Stirling 公式.

第 9 章 数项级数

问题 9.1

1. 利用恒等式

$$
\frac{1}{(pn+q)(pn+q+pr)}=\frac{1}{pr}\left(\frac{1}{pn+q}-\frac{1}{pn+q+pr}\right)
$$

及例 1 中的方法即得.

注意,练习题 9.1 第 2 题中的 2°,3°,4°及第 3 题中的 4°均为此题的特例.事实上,分别在本题中取 $p=2,q=-1,r=1$;$p=3,q=-2,r=1$;$p=1,q=0,r=3$;$p=1,q=0,r=m$ 就得到上述四题的结果.

2. 把级数的部分和写成

$$
\begin{aligned}
S_N &= \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N}\frac{1}{m^2-n^2}=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{m^2-n^2}+\sum_{n=m+1}^{N}\frac{1}{m^2-n^2}\\
&=\frac{1}{2m}\sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{1}{m-n}+\frac{1}{m+n}\right)+\frac{1}{2m}\sum_{n=m+1}^{N}\left(\frac{1}{m-n}+\frac{1}{m+n}\right),
\end{aligned}
$$

然后把上面四个和式分别写成

$$
\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{m-n}=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k},\quad \sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{m+n}=\sum_{k=m+1}^{2m-1}\frac{1}{k},
$$

$$\sum_{n=m+1}^{N}\frac{1}{m-n}=-\sum_{k=1}^{N-m}\frac{1}{k},\quad \sum_{n=m+1}^{N}\frac{1}{m+n}=\sum_{k=2m+1}^{N+m}\frac{1}{k}.$$

用完全相同的方法，读者可以证明：

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{m^2-n^2}=\begin{cases}\dfrac{3}{4m^2}, & m\text{ 是偶数},\\[2mm] \dfrac{1}{4m^2}, & m\text{ 是奇数}.\end{cases}$$

3. 利用不等式

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)<\frac{1}{k}<\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right),k=2,3,\cdots$$

4. 可按下列步骤来证：

(i) 证明$\{a_n\}$严格递减；

(ii) $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}>\dfrac{a_n-a_{n+1}}{a_n^2}$；

(iii) $a_n^2<(a_n-a_{n+1})\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}(a_k+a_{k+1})$；

(iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=+\infty$.

本题的困难之处是不易想到不等式(iii)，正是这个不等式充分利用了数列$\{a_n-a_{n+1}\}$严格递减的条件.

5. 先用 Cauchy - Schwarz 不等式得到

$$(1+2+\cdots+n)^2\leqslant(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{2^2}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\right),$$

由此得

$$\frac{2n+1}{a_1+\cdots+a_n}\leqslant4\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{j^2}{a_j}.$$

不等式两边对 n 求和，再把不等式右端的式子交换求和次序即得.

这里要用到下面的等式：

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}x_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=j}^{\infty}x_{ij}\tag{1}$$

要证明这个等式，只需看下面的图：

$$\begin{array}{l}x_{11}\\ x_{21}\ x_{22}\\ x_{31}\ x_{32}\ x_{33}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{i1}\ x_{i2}\ x_{i3}\cdots\ x_{ii}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}$$

(1)的左端是先把每行的数加起来，再把每行所得的和加起来；(1)的右端则是先把每列的数加起来，再把每列的所得的和加起来，因而二者相等.

问题 9.2

1. 利用等式

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}$当$\{a_n\}$有界时发散，当$a_n\to+\infty$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$同敛散. 其他情况下结论不定. 例如命

$$a_n=\begin{cases}n, & n=2^k, k=0,1,\cdots\\ 0, & \text{其他情况},\end{cases}$$

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}<+\infty$. 又如命

$$a_n=\begin{cases}\frac{n}{2}, & n=2k, k=1,2,\cdots,\\ 0, & \text{其他情况},\end{cases}$$

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}=+\infty$.

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$当$\{na_n\}$有界时发散，当$na_n\to+\infty$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$也发散. 在其他情况下级数可能收敛，例如命

$$a_n=\begin{cases}1, & n=2^k, k=0,1,\cdots,\\ \frac{1}{n^2}, & \text{其他情况},\end{cases}$$

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}<+\infty$.

3. 当$\alpha>1$时，利用不等式

$$\frac{a_n}{S_n^\alpha}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^\alpha}\leqslant\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

当$\alpha\leqslant1$时，利用不等式

$$\frac{a_n}{S_{n-1}}\geqslant\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

4. 利用$\{a_n\}$的递减性，可得

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}a_k\leqslant2^na_{2^n},$$

$$2^na_{2^n}=2(2^{n-1}a_{2^n})\leqslant2\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n}a_k.$$

从这两个不等式即知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^na_{2^n}$同时敛散. 分别取$a_n=\frac{1}{n^{1+\alpha}}$和$a_n=\frac{1}{n\ln n}$即能证明结果(1)与(2).

注意，这个命题还可以推广到更一般的情形：设$\{a_n\}$是递减的正数列，$\{k_n\}$是严格递增的正整数列，如果存在常数M，使得

$$\frac{k_{n+1}-k_n}{k_n-k_{n-1}}\leqslant M,\quad n=2,3,\cdots,$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(k_{n+1}-k_n)a_{k_n}$ 同敛散.

取 $k_n=2^n$,就得到上面的结果.证明的方法与上面的一样.

5. 按规定,划去分母中含有数字 9 的那些项后,新级数各项的分母仅由 0,1,…,8 这 9 个数字组成.所以在 0 到 $10^m-1=\underbrace{9\cdots9}_{m个}$中,这种数共有 9^m 个.因此,落在区间$(10^{m-1}-1,10^m-1)$不含数字 9 的正整数共有 9^m-9^{m-1}个.于是新级数可以写成

$$\underbrace{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{8}}_{(9-1)个}+\underbrace{\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{88}}_{(9^2-9)个}+\cdots\leqslant 80.$$

问题 9.3

1. 从条件 $a_n-a_{n+1}\geqslant\beta a_n^{2-\alpha}$ 立得

$$0\leqslant a_{n+1}\leqslant a_n(1-\beta a_n^{1-\alpha}),\tag{1}$$

由此得$\{a_n\}$递减,设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$,从(1)可得 $c=0$,和 $\alpha\leqslant1$ 再分 $\alpha=1$ 和 $\alpha<1$ 两种情形证明所要的结论.

2. 因为 $q<r<1$,故可取 $\varepsilon>0$ 充分小,使得 $q+\varepsilon<r<1$,记 $q_1=\frac{q+\varepsilon}{r}$,则 $0<q_1<1$.我们只要就$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{a_n}=q<1$ 的情形来证,由此可得,当 n 充分大时有

$$0<\frac{a_n}{r^n}<q_1^n.$$

3. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$,记 $S_0=0,S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$,命 $\beta_n=S-S_{n-1},b_n=\sqrt{\beta_n}-\sqrt{\beta_{n+1}}$,那么 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 就是需要的级数.

问题 9.4

1. (1) 从表面上来看,本题既不是正项级数,又不能使用 Dirichlet 判别法或 Abel 判别法,但稍作变形,就知它是一交错级数.实际上可证明

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

(2) 证明

$$\left\{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

是递减趋于 0 的数列.

2. 取 σ_1,σ_2 使得 $0<\sigma_1<\sigma_2<\lambda$.从

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>\sigma_2\quad(当\ n\ 充分大),$$

可知$\{a_n\}$是递减数列.再从等式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma_1}-1}{\frac{1}{n}}=\sigma_1<\sigma_2$$

可得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{\sigma_2}{n}>\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sigma_1}.$$

由此知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

3. 当$b-1>a$时级数收敛,可直接用Raabe判别法来证明.现求其和.记

$$a_n=\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)},\quad 1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$$

当n充分大时有$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{1}{n}>1$,故$\{a_n\}$是严格递减数列,由§9.4例1知道,$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.再从

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{n(b-a)}{a+n}$$

可得

$$a(a_n-a_{n+1})+n(a_n-a_{n+1})=(b-a)a_{n+1}\tag{1}$$

从(1)和$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$即可算得$S=\frac{b-1}{b-a-1}$.

当$b-1\leqslant a$时,级数发散.

4. 充分性.设$\{a_n\}$有界,则$\{a_n\}$有极限,记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}-1$,于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=a-a_1$.由此可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n<+\infty$.

必要性.设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n<+\infty$若$\{a_n\}$无界,则必$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.由此通过Cauchy收敛原理导出$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散的矛盾.

5. 因为-1的指数是$[\sqrt{n}]$,所以它不是交错级数,但若把具有相同符号的项合并后所得的级数收敛,那么根据定理9.4,原级数也收敛.为此把原级数写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1}\frac{(-1)^{[n]}}{n}.$$

当$k^2\leqslant n<(k+1)^2$时,$k\leqslant\sqrt{n}<k+1$,所以$[\sqrt{n}]=k$,因而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right).$$

记

$$a_k=\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1},$$

剩下的事情就是去证明$\{a_k\}$递减趋于0.

6．命 $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\cos\frac{2\pi}{3}n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 就符合题中的要求.

7．选取适当的正整数 N,写

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_n\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}a_kb_n\right|+\left|\sum_{k=N+1}^{n}a_kb_n\right|,$$

可证当 n 充分大时,右端两项都可小于事先指定的 ε.

8．因为 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 递减趋于 0，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_nb_n)\frac{1}{b_n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,由上题即得本题的结论.

9．记 $c_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n$,则 $a_n=\frac{c_n-c_{n-1}}{n}$,然后证明

$$\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}a_k-\frac{c_n}{n+1}.$$

问题 9.5

1．(1) 利用极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

可以证明所给级数当 $p>1$ 时绝对收敛；$\frac{1}{2}<p\leqslant1$ 时条件收敛;$0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时发散.

(2) $p>2$ 时绝对收敛,$0<p\leqslant2$ 时条件收敛.

(3) p,q 都大于 1 时,级数绝对收敛;$0<p=q<1$ 时,级数条件收敛;其他情形级数发散.

2．用反证法.如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=+\infty$,我们要构造一个趋于 0 的数列 $\{x_n\}$,使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n$ 发散.从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=+\infty$ 得知,对任意正整数 m,有 $\sum\limits_{n=m}^{\infty}|a_n|=+\infty$.现命 $k_1=1$,则必有 k_2,使得 $\sum\limits_{n=k_1+1}^{k_2}|a_n|>1$,存在 k_3,使得 $\sum\limits_{n=k_2+1}^{k_3}|a_n|>2,\cdots$,无限继续这个过程,可得数列 $\{k_j\}$,使得

$$k_1<k_2<k_3<\cdots,\text{且}\sum_{n=k_j+1}^{k_{j+1}}|a_n|>j,\ j=1,2,\cdots.$$

今作数列 $\{x_n\}$ 如下:

$$x_1=0,\text{当 }k_j<n\leqslant k_{j+1}\text{ 时},x_n=\frac{1}{j}\operatorname{sgn}a_n,\ j=1,2,\cdots.$$

可以证明这是一个趋于 0 的数列,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n=+\infty$.

如果把条件中的“任意一个趋于 0 的数列”改为“任意一个递减趋于 0 的数列”,结论不再成立.例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$,它对任意一个递减趋于 0 的数列 $\{x_n\}$ 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ 收敛,但它本身是发散的.

3. 利用公式

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+o(1)$$

4. 用书中§9.5例2一样的方法即可证明.

5. 对于任给的正整数 N,记 $n=\left[\frac{N}{p+q}\right]$,按照改变符号的规律,有

$$\sum_{n=1}^{m(p+q)} a_n=\sum_{n=1}^{m}\left\{\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(n-1)p+(n-1)q+k}-\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{np+(n-1)q+k}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\left\{\ln\left(1+\frac{p-q}{(n-1)(p+q)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+o(1)\right\}$$

让 $m\to\infty$ 即得所要证者.

6. 见定理9.26的证明.

问题9.6

1. 记 $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n^\alpha}$, $b_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n^\beta}$,乘积的通项

$$c_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}=(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha(n-k+1)^\beta}.$$

容易证明,当 $\alpha+\beta\leqslant 1$ 时,$|c_n|\geqslant 1$,故 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 发散.

要证当 $\alpha+\beta>1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛,分下面两步做:

(i) 先证明 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$,把 c_n 写成

$$c_n=(-1)^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{k^\alpha(n-k+1)^\beta}+\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}\frac{1}{k^\alpha(n-k+1)^\beta}\right),$$

因为当 $1\leqslant k\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$ 时,$n-k+1\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]$,所以

$$|c_n|\leqslant\frac{1}{\left[\frac{n}{2}\right]^\beta}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}+\frac{1}{\left[\frac{n}{2}\right]^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\beta}.$$

从 $\alpha>0,\beta>0,\alpha+\beta>1$,即可得 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$

(ii) 记级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$. 如果级数

$$c_1+(c_2+c_3)+(c_4+c_5)+\cdots \tag{1}$$

收敛,这意味着数列 $\{S_{2n+1}\}$ 收敛,由于

$$S_{2n+1}=S_{2n}+c_{2n+1},$$

而 $c_{2n+1}\to 0$ 故 $\{S_{2n}\}$ 与 $\{S_{2n+1}\}$ 有相同的极限,因而 $\{S_n\}$ 收敛. 因此问题就归结为(1)收敛.

2. 记 $a_0=1,\quad a_n=-\left(\frac{3}{2}\right)^n,\quad n=1,2,\cdots;$

$$b_0=1,\quad b_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right),\quad n=1,2,\cdots,$$

可以证明

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 绝对收敛.

问题 9.7

1. 利用公式 $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos x)$ 可得

$$\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}, 2+\sqrt{2} = 2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) = 2^2\cos^2\frac{\pi}{2^3}.$$

所以 $\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2\cos\frac{\pi}{2^3}$. 一般可证

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n\text{重}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

再利用练习题 7 的结果.

2. 用 P_n 记它的部分乘积,证明

$$P_n = \frac{a_n+1}{n!}, \quad P_n - P_{n-1} = \frac{1}{n!}.$$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散都容易证明. 要证明 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛,先证明

$$P_{2N} = \prod_{n=1}^{2N}(1+a_n) = \prod_{k=1}^{N}(1+a_{2k-1})(1+a_{2k})$$

收敛,再证明 $\{P_{2N+1}\}$ 和 $\{P_{2N}\}$ 有相同的极限.

4. 记 $p_n = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n = -\infty$. 记 $a_n = \frac{n^n}{n!}e^{-n}$, 证明 $a_{n+1} = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)\frac{1}{e}$.

证明本题的最简单的方法是用 Stirling 公式:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

由此即得

$$\frac{n^n}{e^n}\frac{1}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \to 0, \quad n\to\infty.$$

而且还能知道这个数列趋于 0 的阶. 这里所以要设置这样一道题,是希望让读者知道,发散于 0 的无穷乘积有时可用来证明一些极限等式.

5. 固定 $x \neq x_0$,把原级数写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0^2-1)(x_0^2-2^2)\cdots(x_0^2-n^2)\frac{(x^2-1)(x^2-2^2)\cdots(x^2-n^2)}{(x_0^2-1)(x_0^2-2^2)\cdots(x_0^2-n^2)}. \tag{1}$$

如果能证明数列

$$a_n = \frac{(x^2-1)(x^2-2^2)\cdots(x^2-n^2)}{(x_0^2-1)(x_0^2-2^2)\cdots(x_0-n^2)}$$

单调有界，那么由 Abel 判别法，即知(1)收敛. $\{a_n\}$的单调性易证，要证$\{a_n\}$有界，只须让它收敛，此时就可用无穷乘积来处理.

6. 由题设

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n+1}{n}+O(b_n)=\frac{n+1}{n}\left(1+\frac{n}{n+1}O(b_n)\right)$$

记 $$c_n=\frac{n}{n+1}O(b_n),\text{则}\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}\frac{1}{1+c_n}.$$

由此得

$$\frac{a_{n+1}}{\frac{1}{n+1}}=\frac{a_1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+c_k)}$$

只要能证明 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+c_k)$收敛，问题便得到了证明. 这是又一个用无穷乘积的理论来解决无穷级数中问题的例子.

第 10 章　函数列与函数项级数

问题 10.2

1. 容易用 D'Alembert 判别法证明级数在$(0,+\infty)$中处处收敛，设其和为 $S(x)$. 用 $S_n(x)$记它的部分和，那么

$$S(x)-S_n(x)=\frac{1}{(1+x)\cdots(1+nx)}.$$

由此即知级数在$[0,\delta]$中非一致收敛，在$[\delta,+\infty]$中一致收敛.

2. 容易知道$\{f_n\}$在$[0,+\infty]$上收敛于 0. 证明

$$\beta_n=\sup_{x\in[0,+\infty]}|f_n(x)-f(x)|=\mathrm{e}^{-1}(\ln n)^{k-1}.$$

3. 用数学归纳法证明

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{M}{n!}(x-a)^n,$$

这里 M 是一个常数.

4. 设$\{f_n\}$，$\{g_n\}$分别在区间 I 上一致收敛于 f 和 g. 先证明 f 和 g 都是 I 上的有界函数，再证明$\{f_n\}$和$\{g_n\}$都在 I 上一致有界.

5. 如在上题中去掉$\{f_n\}$或$\{g_n\}$有界的条件，结论便不再成立. 可举下面的例子：在区间$[0,1]$上，考虑

$$f_n(x)=x\left(1+\frac{1}{n}\right),\quad g_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x=0\text{ 或无理数},\\ q+\dfrac{1}{n} & x=\dfrac{p}{q},q>0.\end{cases}$$

这时 f_n 在$[0,1]$上一致收敛于 $f(x)=x$，$g_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛于

$$g(x)=\begin{cases}0, & x=0\text{ 或无理数},\\ q & x=\dfrac{p}{q},q>0,\end{cases}$$

而$\{f_ng_n\}$在$[0,1]$上不再一致收敛到fg.

6. 对于给定的$\varepsilon>0$,把$[a,b]$等分成若干个小区间,使每个小区间的长度小于ε,利用级数在每个分点上的收敛性以及中值定理即可证明级数在$[a,b]$上一致收敛.

7. 利用f在$x=0$附近的Taylor展开式(展到二阶导数)及$f(0)=0,0<f'(0)<1$的条件即可证得在$x=0$的充分小的邻域内有不等式$|f(x)|\leqslant q|x|$,其中$q<1$反复利用这一不等式,即可证得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$x=0$的邻域中一致收敛.

8. 容易证明所给级数在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$中一致收敛.证明它在$\left[\frac{1}{2},1\right]$中一致收敛时,把级数写成

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}\cos nx\\=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}}\cos nx\\=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}\frac{(1-x)x^n}{1-x^n}\cos nx.\end{aligned}$$

若能证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)x^n}{1-x^n}\cos nx$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$中一致收敛,则由Abel判别法,即知原级数在$\left[\frac{1}{2},1\right]$中一致收敛.

问题 10.3

1. 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$E$上一致收敛,所以对任意$\varepsilon>0$,存在$N$,当$n>N$时,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|<\varepsilon$$

对任意$x\in E$成立.在上式中让$x\to x_0(x\in E)$,即得

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\right|<\varepsilon.$$

这就证明了$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.2°的证明和定理10.7的证明是一样的.

为什么要出这样一个习题?定理10.7′的结论可以写成下面的形式:

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0),x_0\in[a,b].$$

这就产生一个问题,在定理10.7′中把$u_n(x)$的连续性改成下列极限存在:

$$\lim_{x\to x_0}u_n(x)=a_n,\quad n=1,2,\cdots,$$

那么在一致收敛的前提下,是否还有

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n?$$

甚至$x_0=\pm\infty$,类似的结果是否还成立?答案都是肯定的,这就是本题的内容.

2. 直接利用第1题的结果.

3. 先证 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上可积. 因为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,c-\delta]$和$[c+\delta,b]$上一致收敛,所以 $S(x)$在$[a,c-\delta]$和$[c+\delta,b]$上可积,因而分别存在$[a,c-\delta]$的分割 π': $a=x_0'<x_1'<\cdots<x_n'=c-\delta$ 和$[c+\delta,b]$的分割 π'': $c+\delta=x_0''<x_1''<\cdots<x_m''=b$,使得

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i'\Delta x_i'<\varepsilon,\qquad \sum_{i=1}^{m}\omega_i''\Delta x_i''<\varepsilon$$

这是 ω_i' 和 ω_i'' 分别是$S(x)$在$[x_{i-1}',x_i']$和$[x_{i-1}'',x_i'']$上的振幅. 现在考虑分割

$$\pi: a=x_0'<\cdots<x_n'=c-\delta<c+\delta=x_0''<\cdots<x_m''=b,$$

利用有界收敛的条件便可证明

$$\sum_{\pi}\omega_i\Delta x_i<\alpha\varepsilon.$$

这里 α 是某个常数. 等式的证明是容易的.

本题引进了有界收敛的概念,这样就能在比一致收敛更弱的条件下保证和函数 $S(x)$是可积的,而且级数可以逐项积分.

4. 由条件(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=\int_a^{+\infty}u_n(x)\mathrm{d}x$ 存在,由条件(3), $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$[a,+\infty]$中一致收敛,由问题1即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty}u_n(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 再用一次问题1的结论即能证明题中的等式成立.

本题把定理10.9′的结果推到了反常积分.

5. 记　$g_n(x)=\dfrac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0}$,由条件(2)知

$$\lim_{x\to x_0}g_n(x)=u_n'(x_0),\ n=1,2,\cdots.$$

命 $E=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$,则 x_0 是 E 的极限点. 由条件(3)知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_n(x)$在 E 中一致收敛. 利用问题1的结果即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x_0)$收敛,而且

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x_0).$$

由此即得要证的结果.

书中定理10.10′给出级数的和函数在一个区间上可以逐项微分的条件,但有时候要判断一个级数在区间中的某些点可微,在某些点不可微,就像问题6那样. 这时定理10.10′就不能用了. 对待这类问题,本题提供了一个判断的方法.

6. 任取 $x_0\neq a_n$, $n=1,2\cdots$,利用上题的结果即知 f 在x_0 处可微. 设 $x_0=a_m$,写

$$f(x)=\frac{|x-x_0|}{2^m}+\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty}\frac{|x-a_n|}{2^n}.$$

利用刚才讨论的结果,即知 f 在x_0 处不可微.

7. (i) 容易证明. (ii) 利用问题1的结果.

(iii) 对于固定的 $x\in[0,+\infty]$,命

$$\varphi(t)=\frac{1}{x+2^t},t\in(0,+\infty),$$

φ 是严格递减的,由面积原理

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)<\int_0^{+\infty}\frac{dt}{x+2^t}<\sum_{n=0}^{\infty}\varphi(n)$$

由此即能得所要证的不等式.

8. 利用积分等式(§7.4 例 2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

9. 在$[0,1]$上定义函数 $\varphi(x)=x(1-x)$,把它奇性延拓到$[-1,0]$上,再把它以 2 为周期延拓到$(-\infty,+\infty)$上,所得的函数仍记为 φ(见图 $F10-1$)容易看出,φ 具有下列性质:

(i) $|\varphi|\leqslant\frac{1}{4}$;

(ii) $\varphi(k)=0,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$;

(iii) φ 处处可导,且$|\varphi'|\leqslant1$;

(iv) $\varphi'(2k)=1,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

现在定义函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(n!\,x)}{(n!)^2}.$$

可以证明,f 在有理点处取有理数值,f' 在有理点处取无理数值.

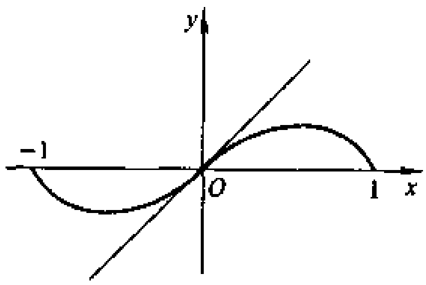

图 $F10-1$

问题 10.4

1. 先证 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R\leqslant1$.记 $S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$,证明 $\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n$ 的收敛半径 $R\geqslant1$.

2. 利用定理 9.14 的不等式和定理 10.12.

3. 题中的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$.由 Leibniz 判别法知该级数收敛.命

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}x^{3n-1}.$$

由 Abel 第二定理知道

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}=\lim_{x\to1}S(x).$$

4. 把级数写成 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}$.用和上题相同的方法即能求得其和.

5. 原级数与重新组合的级数

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

有相同的和.而后者可看成下面两个收敛级数的和

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots,$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots.$$

6. 记所求级数的和为 S,记

$$S(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}x^{2n+1}$$

则 $S=\lim\limits_{x\to1}S(x)$从上式可得

$$(xS'(x))'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

由此解出 $S'(x)$.

7. (1) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n<+\infty$,则由 Abel 第二定理,立得要证的等式. 现设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n=+\infty$,要证

$$\lim_{x\to R-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=+\infty.$$

(2) 利用等式

$$\ln\frac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

8. 利用上题的结果和 Abel 第二定理.

问题 10.5

1. 利用

$$(\sin(2^nx))^{(m)}=2^{mn}\sin\left(2^nx+\frac{m}{2}\pi\right),$$

算出

$$f^{(m)}(0)=\left(\sin\frac{m}{2}\pi\right)e^{2^m}.$$

由此得 f 在 $x=0$ 处的 Taylor 级数为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^ke^{2^{2k+1}}}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

2. 由 Taylor 公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x),$$

由定理 7.10 知道 R_n 有下面的积分表达式:

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

通过变换 $t=x(1-u)$,得

$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}=\frac{1}{n!}\int_0^1u^nf^{(n+1)}(x(1-u))\mathrm{d}u.$$

由此可得

$$0\leqslant R_n(x)\leqslant\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}R_n(r)\leqslant\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}f(r),0\leqslant x\leqslant r.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0.\quad(0\leqslant x\leqslant r).$

3. 证明

$$x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\frac{x^{11}}{11}-\cdots=\int_0^x\frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}.$$

再由 Abel 第二定理即得要证的结果.

4. 这是一个较难的题,证明如下:

利用 $\ln(1+x)$ 的展开式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots,\quad -1<x\leqslant1,$$

得

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{k^3}-\cdots.$$

由此可得

$$\ln n=\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^3}-\cdots$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\ln n$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^3}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^4}-\cdots\tag{1}$$

另一方面,记

$$S(n)=\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^3}+\frac{1}{4}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^4}-\cdots\tag{2}$$

它是一个 Leibniz 型的交错级数,它的和不超过级数的第一项,因而有

$$0<S(n)\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

由此即得 $\lim\limits_{n\to\infty}S(n)=0$ 把(1)和(2)逐项相加得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\frac{1}{n}+S(n)\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}-\cdots\\&=\frac{1}{2}S_2-\frac{1}{3}S_3+\frac{1}{4}S_4-\cdots\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}S_k.\end{aligned}$$

让 $n\to\infty$,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=\gamma$,所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}S_k=\gamma.$$

问题 10.6

1. (1) 从不等式$(1-x^2)^n\geqslant 1-nx^2$ 即可证得 $c_n\leqslant\sqrt{n}$.

(2) 在 $P_n(x)=\int_{-1}^{1}f(x+t)Q_n(t)\mathrm{d}t$ 中作变量代换$x+t=u$,并注意到 f 在$[0,1]$外等于 0,即知 P_n 是x 的多项式.利用 f 在$[0,1]$上的一致连续性和(1)即可证得$\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)=f(x)$.

(3) 在 $f(0)=f(1)=0$ 的条件不成立时,考虑函数

$$g(x)=f(x)-f(0)-x(f(1)-f(0)),\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

2. 设 P 是一 m 次多项式,那么只要 $n>m$,便有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}P\left(\frac{k}{n}\right)=0.$$

再利用 Weierstrass 逼近定理即可证得需要的结果.

3. 由 Weierstrass 逼近定理,对任意 $\varepsilon>0$,存在多项式 P,使得对任意 $x\in[a,b]$有

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon.$$

由所给条件$\int_a^b f(x)P(x)\mathrm{d}x=0$.由此可得

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0.$$

4. 按题意,存在多项式序列 P_n,使得

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=f(x)$$

在$(-\infty,+\infty)$中成立.由此可知存在正整数 N 及相应的多项式$P_N(x)$,使得

$$P_n(x)-P_N(x)=c_n,\quad n=N,N+1,\cdots$$

这里 c_n 是一个常数.从此便可推知 f 是一多项式.

5. 先证明

$$B'_{n+1}(x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\left\{f\left(\frac{k+1}{n+1}\right)-f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right\}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

用中值公式得

$$B'_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}f'(\xi_k)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\quad \xi_k\in\left(\frac{k}{n+1},\frac{k+1}{n+1}\right).$$

由此即可证得所要的结果.

问题 10.7

1. 证明数列$\left\{\frac{1}{1-2n}\binom{2n}{n}\right\}$的母函数是$(1-4x)^{\frac{1}{2}}$.

2. 记 $a_n=\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-k}{k}\alpha^k$,证明 a_n 满足递归关系

$$a_n=a_{n-1}+\alpha a_{n-2}$$

3. (1) 在上题中取 $\alpha=2$.

(2) 在上题中取 $\alpha=-1$.

4. 把等式的右端记为 a_{n-1},记 $b_k=\sum_{l=0}^{k}\binom{n}{l}$证明

$$a_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}b_k b_{n-k-1}.$$

若记$\{b_k\}$的母函数为 $f(x)$,那么 a_{n-1}是 $f^2(x)$的幂级数展开式中 x^{n-1}的系数,算出 $f^2(x)$便能求得

$$a_{n-1}=\sum_{l=0}^{n-1}\binom{2n}{l}(n-l).$$

最后再证明上式右端为$\frac{n}{2}\binom{2n}{n}$.

3．(1) 在上题中取 $\alpha=2$.

(2) 在上题中取 $\alpha=-1$.

4．把等式的右端记为 a_{n-1}，记 $b_k=\sum\limits_{l=0}^{k}\binom{n}{l}$证明

$$a_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}b_kb_{n-k-1}.$$

若记$\{b_k\}$的母函数为 $f(x)$，那么 a_{n-1}是 $f^2(x)$的幂级数展开式中 x^{n-1}的系数，算出 $f^2(x)$便能求得

$$a_{n-1}=\sum_{l=0}^{n-1}\binom{2n}{l}(n-l).$$

最后再证明上式右端为$\frac{n}{2}\binom{2n}{n}$.

3. (1) 在上题中取 $\alpha=2$.

(2) 在上题中取 $\alpha=-1$.

4. 把等式的右端记为 a_{n-1}，记 $b_k=\sum\limits_{l=0}^{k}\binom{n}{l}$证明

$$a_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}b_kb_{n-k-1}.$$

若记$\{b_k\}$的母函数为 $f(x)$，那么 a_{n-1}是 $f^2(x)$的幂级数展开式中 x^{n-1}的系数，算出 $f^2(x)$便能求得

$$a_{n-1}=\sum_{l=0}^{n-1}\binom{2n}{l}(n-l).$$

最后再证明上式右端为$\frac{n}{2}\binom{2n}{n}$.